Ueber

# regulär verzweigte Riemann'sche Flächen

## und die durch sie definirten Irrationalitäten.

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der Universität München

vorgelegt von

**Walther Dyck**
aus München.

**München,**
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
**1879.**

Ueber

# regulär verzweigte Riemann'sche Flächen

## und die durch sie definirten Irrationalitäten.

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der Universität München

vorgelegt von

**Walther Dyck**

aus München.

**München,**

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

**1879.**

Meinem verehrten Lehrer

Herrn

Professor Dr. Felix Klein

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554610_0122

# Einleitung.

## Das Thema.

Die Behandlung algebraischer Gleichungen verlangt im Galois'schen Sinne die Untersuchung der zugehörigen Galois'schen Gruppe und zwar deren Zerlegung in eine Reihenfolge von einfachen Gruppen und die Discussion dieser letzteren. Algebraisch ist damit die Aufstellung der Galois'schen Resolvente einer gegebenen Gleichung verlangt und die Zurückführung dieser auf eine Reihenfolge einfacher Gleichungen, d. h. solcher von einfacher Gruppe.

Man hat nun bisher kein allgemeines Princip, um die durch eine Galois'sche Gruppe definirten Irrationalitäten auf bestimmte Fundamentalirrationalitäten zurückzuführen. Es hat daher Herr Klein vorgeschlagen, jedesmal zu untersuchen, ob zu einer gegebenen Gruppe Gleichungen mit einem rational vorkommenden Parameter existiren und unter diesen diejenigen vom kleinsten Geschlechte herauszusuchen.[1]) Die durch letztere Gleichungen definirten Irrationalitäten sind dann als Fundamentalirrationalitäten zu bezeichnen, und auf sie sind alle Gleichungen von der gleichen Gruppe zu transformiren.

Zu einer ersten Orientirung auf dem so präcisirten Gebiete schien es nicht unzweckmässig, einmal diejenigen

1) Vergl. Klein „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade." Math. Annalen Bd. XV. p. 278.

Galois'schen Resolventen mit einem rational vorkommenden Parameter aufzustellen und zu discutiren, welche das niedrigste Geschlecht besitzen.[1])

Von allen einfachen Gruppen erfährt man so die einfachsten Fälle, die hier auftretenden zusammengesetzten Gruppen aber lassen uns gewisse Methoden ausbilden, die Composition einer Gruppe zu studiren; diese Methoden, leicht übersichtlich in unseren wenig complicirten Fällen, lassen sich dann auch für höhere Gruppen anwenden.

Im vorliegenden sind, mit den eben erwähnten Gesichtspunkten die sämmtlichen Galois'schen Resolventen mit einem Parameter vom Geschlechte

$$p = 0, 1, 2, 3$$

aufgestellt und behandelt[2]). —

---

1) Herr Klein fragt hiernach in seiner Abhandlung „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen." Math. Annalen Bd. XIV. p. 460. Anm.

Vergl. auch die Abhandlung „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen 5. Grades." Math. Annalen XIV. p. 148.

2) Die Fälle $p = 0$ sind von Herrn Klein erledigt in den Abhandlungen:

„Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich." Annalen IX. pag. 183 ff. „Ueber lineare Differentialgleichungen." Annalen XI pag. 115 ff. u. XII. pag. 167 ff. „Weitere Untersuchungen über das Icosaeder." Annalen XII. pag. 503 ff.

Man vergl. ferner die eben citirten Abhandlungen, sowie

Schwarz „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt." Borchardt's Journal Bd. 75. p. 292 ff.

Wir werden in der Folge gleichwol die Fälle $p = 0$ mitbehandeln; sie greifen so tief auch in die weiteren Betrachtungen hinein, dass dies der Vollständigkeit wegen wol geboten erscheint.

[Citate auf die angeführten Klein'schen Abhandlungen bezeichnen wir im Folgenden einfach durch Annalenband und Seitenzahl].

Es ist mir eine hohe Freude, auch an dieser Stelle der anregenden und fördernden Teilnahme dankend erwähnen zu dürfen, die mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Dr. Felix Klein mir während der ganzen Arbeit zu Teil werden liess.

## Plan der Untersuchung.

Mit der Fragestellung hat Herr Klein in den citirten Abhandlungen auch den Plan der Untersuchung angedeutet und dieser mag zunächst hier entwickelt werden; wenn ich dabei auch die über Galois'sche Resolventen allgemein bekannten Sätze vorausschicke, so geschieht es der Vollständigkeit wegen und um mich in der Folge kurz darauf zu beziehen.

Sei

$$(1.) \qquad f(\eta, z) = 0$$

(unter $\eta$ die Unbekannte, unter z den Parameter verstanden) eine Galois'sche Resolvente mit einem rational vorkommenden Parameter vom Grade N in $\eta$.

Sie hat die characteristische Eigenschaft, dass jede Wurzel $\eta_\iota$ sich durch jede andere $\eta_\varkappa$ und übrigens den Parameter z rational ausdrückt:

$$(2.) \qquad \eta_\iota = R(\eta_\varkappa, z)$$

und diese Eigenschaft kann auch umgekehrt zur Definition dienen.

Jede Substitution $\left| \begin{matrix} \eta_\iota \\ \eta_\varkappa \end{matrix} \right|$ stellt wegen (2.) eine rationale Transformation der Gleichung (1.) in sich dar: Die Gleichung (1.) geht also durch N rationale Transformationen in sich über, welche sich dadurch kennzeichnen, dass wir jede Wurzel $\eta_\iota$ in jede andere $\eta_\varkappa$ und in sich selbst überführen.

Construiren wir nun über der Ebene der complexen

Variablen z die durch $f(\eta, z) = o$ definirte Riemann'sche Fläche:

Sie ist eine N blättrige, und wegen Gleichung (2.) ist jedes Blatt genau so verzweigt, wie jedes andere.

Die N rationalen Transformationen der Gleichung (1.) in sich sind geometrisch dadurch characterisirt, dass wir ein Blatt der Fläche in jedes andere und in sich selbst überführen; bei jeder solchen Zuordnung wird dann stets die ganze Fläche eindeutig in sich transformirt.

Eine solche Riemann'sche Fläche heisst nach Herrn Klein eine regulär verzweigte; für sie ergibt sich sofort der Satz:

Jede Galois'sche Resolvente $f(\eta, z) = o$ gibt Anlass zu einer regulär verzweigten Riemann'schen Fläche.

Auf Grund Riemann'scher Principien können wir aber auch umgekehrt den Satz aussprechen:

Durch jede regulär verzweigte Riemann'sche Fläche ist eine ganze Classe Galois'scher Resolventen mit einem Parameter definirt, die auseinander durch rationale Tschirnhausentransformation hervorgehen.

Dieser letzte Satz bietet nun unmittelbar das Mittel, die sämmtlichen Galois'schen Resolventen mit einem Parameter für ein gegebenes Geschlecht p aufzuzählen:

Wir zählen alle Riemann'schen Flächen der eben definirten regulären Verzweigung auf, die das vorgelegte Geschlecht p ergeben.

So haben wir unsere Functionen zunächst geometrisch durch die zugehörigen Riemann'schen Flächen definirt. An diese letzteren wird sich also, vorerst bezüglich ihrer Gestalt, unsere Untersuchung wenden. Das Studium der N eindeutigen Transformationen unserer Flächen in sich wird uns dann

weiterhin für jeden Fall die Gruppe der zugehörigen Gleichung, welche mit der Gruppe jener Transformationen isomorph ist, erkennen lassen; die geometrisch erschlossene Zusammensetzung dieser zeigt dann unmittelbar auch die Zusammensetzung der Irrationalitäten, die durch unsere Flächen definirt sind.

Wir gliedern die Arbeit in vier Teile:

Der erste, geometrische Teil behandelt das geometrische Fundament der ganzen Frage: Die regulär verzweigten Riemann'schen Flächen, die Art ihrer Aufstellung und ihre Discussion.

Der zweite, gruppentheoretische Teil hat uns die Mittel der Discussion unserer Gruppen zu schaffen. Die geometrische Definition derselben lässt es als vorteilhaft erscheinen auch diese gruppentheoretischen Untersuchungen in geometrisches Gewand zu kleiden. Diese Art der Darstellung bekommt dann noch weiterhin eine unmittelbar functionentheoretische Deutung.

In einem besonderen dritten Teile sind die Resultate zusammengestellt, welche die für $p = 0, 1, 2, 3$ durchgeführten Untersuchungen ergeben. Hier zählen wir also in geometrischer Definition die Galois'schen Resolventen dieser Geschlechter auf und geben gleichzeitig die völlige Zerlegung der zugehörigen Gruppen in einfache Gruppen. Das diesem Teile abzulesende Ergebniss sprechen wir vorgreifend in folgendem Satze aus:

Innerhalb $p = 0, 1, 2, 3$ sind die cyklischen Gruppen von Primzahlordnung, die Gruppe des Icosaeders und eine Gruppe von 168 Substitutionen [bei $p = 3$] die einzigen einfachen Gruppen. Die beiden letzteren definiren jene von Herrn Klein in

den Eingangs angeführten Abhandlungen discutirten Irrationalitäten.

Alle innerhalb unserer Geschlechter auftretenden zusammengesetzten Gruppen aber lassen sich in eine Reihenfolge bloss cyklischer Gruppen zerlegen.

Der vierte, algebraische Teil beschäftigt sich dann mit der Aufstellung der unseren Flächen entsprechenden algebraischen Irrationalitäten und stützt sich dabei auf die vorangegangenen geometrischen und gruppentheoretischen Betrachtungen.

Nach dem eben vorausgeschickten Satze sehen wir zunächst, dass unsere sämmtlichen Irrationalitäten [mit Ausnahme jener beiden schon von Herrn Klein discutirten] durch die blosse Ueber- und Nebeneinanderstellung von Wurzelzeichen aufzubauen sind.

---

Mit Genehmigung der hohen Facultät sind hier nur die beiden ersten Teile der vorgelegten Arbeit abgedruckt.

## Erster, geometrischer Teil.

### § 1. Aufstellung regulär verzweigter Riemann'scher Flächen von gegebenem Geschlechte p.

Zur Aufstellung unserer regulär verzweigten Riemann'schen Flächen dient uns zunächst der Geschlechtssatz, der in seiner allgemeinen Form lautet:

$$p = -N + 1 + \frac{1}{2}\Sigma(\nu_i - 1);$$

dabei bedeutet

N die Blätterzahl,

$\nu_i$ die Zahl der im einzelnen Verzweigungspunkte cyklisch verbundenen Blätter und ist die Summe über sämmtliche Verzweigungspunkte ausgedehnt.

In unserem Falle der regulären Verzweigung können wir diesem Satz aber noch eine specielle Form erteilen:

Da nämlich bei unseren Riemann'schen Flächen jedes Blatt genau so verzweigt ist, wie jedes andere, so gilt unmittelbar, dass, wenn im Besonderen an irgend einer Stelle $\nu$ Blätter im Cyklus zusammenhängen, dort die sämmtlichen Blätter zu je $\nu$ verzweigt sind. So nimmt also der Geschlechtssatz hier die specielle Form an:

$$p = -N + 1 + \frac{1}{2}\Sigma\frac{N}{\nu_i}(\nu_i - 1),$$

wo die Summe jetzt über sämmtliche Verzweigungsstellen ausgedehnt ist.

Dieser Satz, als diophantische Gleichung für N und $\nu_i$ aufgefasst, wird uns sofort für jedes p eine gewisse Zahl von zusammengehörigen Werten N, n, $\nu_i$ liefern, die für eine Riemann'sche Fläche Blätterzahl N, Anzahl n der Verzweigungsstellen und Ordnung $\nu_i$ der einzelnen Verzweigungspunkte angeben.

Mit einer solchen Lösung unseres Geschlechtssatzes ist aber nur die Möglichkeit ausgesprochen, an gewissen Stellen $z_i$ die sämmtlichen Blätter in Cyklen zu je $\nu_i$ zusammenzufassen. Soll aber durch diese Verzweigung eine N blättrige Riemann'sche Fläche entstehen, so muss es möglich sein, die Blätter durch diese Cyklen derart zusammenzuhängen, dass die Fläche in sich geschlossen ist; und soll speciell diese Riemann'sche Fläche eine regulär verzweigte sein, so muss in diesen Cyklen auch jedes Blatt genau so verzweigt sein, wie jedes andere. Diese Bedingungen werden nicht für jede Lösung unserer Gleichung zu befriedigen sein; andrerseits aber wird es auch Fälle geben, in denen sie auf mehrfache Weise zu erfüllen sind und so schliessen wir:

Einem Resultate unserer diophantischen Gleichung entspricht nicht notwendig eine regulär verzweigte Fläche.

Es gibt Lösungen, welche keine, und solche, welche mehrere Flächen liefern. Sicher aber sind alle überhaupt möglichen regulären Riemann'schen Flächen in unsern Resultaten enthalten.

Damit ergibt sich nun die folgende Disposition unserer nächsten Untersuchungen: Wir bedürfen vor Allem einer zweckentsprechenden Darstellung Riemann'scher Flächen, die uns einen Aufbau derselben aus den durch die diophantische Gleichung gelieferten Stücken ermöglicht. [§ 2, 3.] Dann werden wir nach geometrischen Methoden suchen, die uns für gewisse Fälle die Bildung regulär verzweigter Rie-

mann'scher Flächen als unmöglich erweisen lassen und weiter werden wir uns mit der Bestimmung der Anzahl wesentlich verschiedener Riemann'schen Flächen zu beschäftigen haben, welche sich aus einer als möglich erkannten Lösung der diophantischen Gleichung ergeben [§ 4.]. Wir beschränken uns hier darauf, von den angegebenen Untersuchungen je einige Beispiele anzuführen [§ 5], welche die dabei zur Anwendung kommenden Methoden zu characterisiren vermögen.

## § 2. Regulär eingeteilte Oberflächen als Bilder unserer regulär verzweigten Riemann'schen Flächen.

Wenn wir zu einer Veranschaulichung der Riemann'schen Flächen schreiten, — und einer solchen bedürfen wir bei allen folgenden Betrachtungen — so wird diese sich hauptsächlich darnach zu richten haben, welche Untersuchungen wir an dem geometrischen Bilde vornehmen wollen. Hier zunächst handelt es sich um die Zusammensetzung der Riemann'schen Flächen aus den durch die diophantische Gleichung gelieferten Elementen und um die Discussion der Möglichkeit und Mannigfaltigkeit einer solchen Zusammensetzung. Dass zu einem solchen Aufbau der Riemann'schen Flächen diese in ihrer N blättrigen Gestalt nicht geeignet sind, übersieht man sofort. Wir werden desshalb eine andere, mehr zweckentsprechende Form unserer Flächen zu Grunde legen, und diese Form hat Herr Klein in den bereits citirten Abhandlungen [1]) in Gestalt der regulär eingeteilten Oberflächen gegeben.

1) Math. Annalen XIV. p. 458 ff. vergl. auch ebenda pag. 134 und 152.

Ich glaube des Zusammenhangs wegen das dort eingeschlagene Verfahren der Deformation der Riemann'schen Fläche in die Gestalt der regulär eingeteilten Oberfläche in Kürze wiederholen zu müssen, um so mehr, als wir im zweiten gruppentheoretischen Teile der Arbeit noch weitere auf analogen Principien beruhende Deformationen unserer Flächen werden kennen lernen.

Denken wir uns eine N blättrige regulär verzweigte Riemann'sche Fläche über der z Ebene ausgebreitet. $z_1, z_2, \ldots z_n$ seien die n Verzweigungsstellen derselben; und zwar mögen in $z_1$ die Blätter zu je $\nu_1$, in $z_2$ zu je $\nu_2$, . . . in $z_n$ zu je $\nu_n$ zusammenhängen. Wir legen in der z Ebene durch die sämmtlichen Verzweigungsstellen $z_1, z_2, .. z_n$ irgend eine geschlossene Curve, einen „Absonderungsschnitt," so dass die z Ebene und in gleicher Weise jedes Blatt unserer Riemann'schen Fläche in zwei Gebiete zerlegt wird, sagen wir ein schraffirtes und ein nichtschraffirtes, die im Sinne der Analysis situs zu einander symmetrisch sind. Nun zerschneiden wir längs des Absonderungsschnittes die sämmtlichen Blätter, wodurch 2 N bezüglich schraffirte und nichtschraffirte Gebiete entstehen; diese fügen wir dann nach passender Deformation wieder genau in der früheren Anordnung zusammen, nur die Blätter nicht mehr übereinander, sondern nebeneinander legend. Dadurch werden die sämmtlichen Windungspunkte der Fläche aufgehoben: Wo $\nu$ Blätter im Cyklus übereinanderlagen, da liegen jetzt $2\nu$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Gebietsteile, einen Cyklus bildend, nebeneinander. Die ganze Riemann'sche Fläche ist verwandelt in eine ohne Verzweigungspunkte frei im Raume gelegene stetig gekrümmte Fläche, die in 2 N abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Gebiete in regulärer Weise eingeteilt ist, d. h. so eingeteilt, dass die gegenseitige Anordnung für alle entsprechenden Gebiete genau dieselbe ist. Die einzelnen Gebiete sind entsprechend der Zahl der

Verzweigungsstellen n-Ecke, die, im Sinne der Analysis situs genommen, abwechselnd congruent und symmetrisch sind. Eine derartig in alternirende Gebiete geteilte Oberfläche, eine regulär eingeteilte Oberfläche, ist uns ein anschauliches Bild unserer Riemann'schen Fläche. Je ein schraffirtes und ein freies Gebiet zusammen bilden ein Blatt der Riemann'schen Fläche, wobei noch die Wahl bleibt, welches der n angrenzenden Polygone wir mit dem ursprünglichen zusammen als ein Blatt behandeln wollen. An Stelle der Windungspunkte sind die Ecken unserer Polygone getreten und wir haben jetzt auf unserer Fläche soviele Ecken derselben Art, als wir vorher Cyklen an einer Verzweigungsstelle hatten. Die Kanten unserer Polygone sind unmittelbar die Bilder unseres Absonderungsschnittes in sämmtlichen Blättern. Der Geschlechtssatz für unsere Riemann'schen Flächen ist übergegangen in den sogenannten erweiterten Euler'schen Polyedersatz. Bezeichnen wir nämlich:

die Zahl sämmtlicher Polygone mit $F = 2N$;

die Zahl sämmtlicher Ecken mit $E = \Sigma \frac{N}{\nu_i}$, [die Summe über die n Verzweigungsstellen ausgedehnt] und

die Zahl der Kanten mit $K = n.N$, so nimmt der Geschlechtssatz unmittelbar die Form an:

$$2p = K - E - F + 2 \quad ^{1}) .$$

---

1) Hier übersieht man auch den einfachsten Weg zur Lösung unserer diophantischen Gleichung: Man hat nämlich:

$$\Sigma \frac{N}{\nu_i} = E \text{ und } N = \frac{E + 2p - 2}{n - 2}$$

Sucht man also für eine Fläche vom Geschlechte p reguläre Gebietseinteilungen in n-Ecke, so hat man nur aus Zahlen N n Faktoren $\frac{N}{\nu_i}$ herauszunehmen, deren Summe:

$$E = (n - 2)\ N - 2p + 2 \text{ beträgt.}$$

Die Betrachtungen des Paragraphen zusammenfassend, sprechen wir die beiden Sätze aus:

Jede regulär verzweigte Riemann'sche Fläche lässt sich durch eine regulär eingeteilte Oberfläche desselben Geschlechtes ersetzen,

und umgekehrt

entspricht jeder regulär eingeteilten Oberfläche auch eine regulär verzweigte Riemann'sche Fläche desselben Geschlechtes.

So können wir also unsere Discussionen statt an der Riemann'schen Fläche unmittelbar an der sie ersetzenden regulär eingeteilten Oberfläche vornehmen, und das von diesen Erwiesene sofort auf jene übertragen.

## § 3. Zerschneidung unserer Flächen in einfach zusammenhängende.

Wir müssen unsere Flächen aus den durch die diophantische Gleichung gelieferten Polygonen zusammensetzen. Wir werden also nicht die Fläche selbst für's erste zu construiren versuchen, sondern ein Netz derselben, das wir dann durch passende Zusammenfügung des Randes in die wirkliche Fläche umgestalten können.

Was lässt sich nun von vorneherein über die Gestalt unseres Netzes sagen?

Wir denken uns die reguläre Oberfläche zerschnitten und in eine einfach zusammenhängende verwandelt und breiten diese in unserem Zeichnungsblatte aus. Wir wollen einen Eckpunkt, in dem $2\nu$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte n-Ecke zusammenstossen, in die Mitte nehmen. An diese $2\nu$ Polygone reihen sich dann in durchaus gleichartiger Weise je [im Sinne der Analysis situs]

congruente und symmetrische Polygone an und es ist, wegen der völligen Regularität unserer Flächeneinteilung, durch passende Ziehung der Querschnitte, die dabei aber im Allgemeinen nicht nach Polygonsseiten erfolgen kann, stets möglich, das Netz so herzustellen, dass es durchaus gleichmässig gestaltet ist bezüglich der $\nu$ schraffirten n-Ecke, welche die Mitte des Zeichnungsblattes bilden. Die Lagerung bezüglich der $\nu$ nichtschraffirten Polygone ist dann genau die symmetrische. Keines von unseren einen Cyklus bildenden n-Ecken ist nämlich vor dem anderen in irgend einer Weise ausgezeichnet und die reguläre Einteilung einer Fläche spricht sich insbesondere darin aus, dass die Fläche um jeden $\nu$fachen Eckpunkt [1]) $\nu$fache Regularität besitzt. Wir wollen dies erste Resultat für die Gestalt unseres Netzes so aussprechen:

Legen wir irgend eine Ecke $\nu$ in die Mitte unserer Zeichnungsebene, so lässt sich um diese das Netz in $\nu$facher Regularität ausbreiten.

Diese kaleidoskopartige Anordnung wird noch besser hervortreten, wenn wir die Symmetrielinien unserer Flächen in's Auge fassen. Als solche seien Linien bezeichnet, welche aus lauter Polygonsseiten bestehend, sich durch jede Ecke geradlinig fortsetzen. [2]) Eine derartige Linie wird sich, eine gewisse Zahl von Kanten umfassend, schliessen und wir werden, je nach der Zahl und Art der in ihr enthaltenen Kanten und Ecken im Allgemeinen verschiedene Arten von Symmetrielinien auf einer Fläche unterscheiden. Für sie ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Die Fläche ist in Bezug auf jede solche Linie symmetrisch.

---

1) So sei allgemein ein Punkt bezeichnet, in dem $\nu$ schraffirte und $\nu$ nichtschraffirte Polygone zusammenstossen.

2) Annalen XIV. p. 465.

Durch einen $\nu$fachen Eckpunkt können höchstens zwei verschiedene Arten von Symmetrielinien gehen, wenn $\nu$ gerade ist, dagegen nur eine Art, wenn $\nu$ ungerade.

Dies sind die notwendigen Bedingungen der Regularität und Symmetrie, die unser Netz erfüllen muss; sie betreffen die Lagenverhältnisse der einzelnen Polygone zu einander; die Gestalt der letzteren hingegen ist noch völlig willkürlich. Denn zunächst kann der Absonderungsschnitt unsere Verzweigungspunkte noch in beliebiger Aufeinanderfolge verbinden, also ist die Reihenfolge der Ecken in unseren Polygonen [Zwei- und Dreiecke natürlich ausgenommen] noch eine ganz beliebige, und erst, wenn wir diese für ein Polygon in irgend einer Weise festgesetzt haben, ist sie für jedes unserer Polygone bestimmt als eine abwechselnd congruente und symmetrische. Die weitere Form der einzelnen Polygone kommt aber gar nicht in Betracht.

Der Uebersichtlichkeit wegen wollen wir jedoch unser Netz auch noch weiterhin in eine gestaltliche Symmetrie bringen. Indem wir eine Ecke $\nu$ in die Mitte unserer Zeichnung nehmen, können wir die von hier auslaufenden Symmetrielinien in ihrem ersten Verlaufe als Gerade darstellen, die sich unter Winkeln $\frac{\pi}{\nu}$ schneiden. Nun zeichnen wir in einen dieser Winkelräume ein erstes Polygon derart ein, dass seine Seiten [mit Ausnahme der beiden gezeichneten Geraden] von lauter Kreisbogen gebildet werden, die sich unter den verlangten Polygonswinkeln schneiden. Alle weiteren Polygone stellen wir dann durch successive Spiegelung an den Polygonsseiten nach dem Princip der reciproken Radien her.[1]) Indem wir stets die Notwendigkeit $\nu$facher Regu-

1) Schwarz; a. a. O. Borchardt's Journal Bd. 75. pg. 316. Man vergleiche auch die auf den beigefügten Tafeln dargestellten Flächennetze.

larität zum Centrum im Auge haben, erhalten wir so, nach Erschöpfung unserer Polygonszahl 2N ein nun auch gestaltlich symmetrisches Netz, begrenzt von einer $\nu$fach symmetrischen Rand-Curve, die jedoch, wie schon Eingangs erwähnt, im Allgemeinen nicht aus Polygonsseiten bestehen wird, sondern von gewissen Transversalen unserer Polygone gebildet sein wird. Diese Randcurve zieht sich in allen Fällen $p = o$ auf den unendlich fernen Punkt unserer Ebene zusammen, während sie für höhere p auch aus mehreren getrennten Zügen wird bestehen können.

In dieser Form scheint die regulär eingeteilte Oberfläche einer ersten Untersuchung am zugänglichsten.

## § 4. Aufbau und Discussion der Netze.

Ist uns jetzt durch eine Lösung der diophantischen Gleichung Art und Zahl der Polygone einer Flächeneinteilung gegeben, so bauen wir in der eben beschriebenen Weise ein Netz unserer Fläche auf. Dies wird allgemein zu reden auf mehrere wesentlich verschiedene Arten möglich sein. Die Vieldeutigkeit in der Aneinanderlagerung der Polygone wird sich jedoch in jedem Falle durch die oben entwickelten Regularitäts- und Symmetriebedingungen sehr beschränken lassen.

Wollen wir dann rückwärts gehend aus unseren Netzen die entsprechenden regulär eingeteilten Flächen herstellen, so haben wir die Rand-Curven in bestimmter Reihenfolge aneinanderzuheften, so zwar, dass die hiebei entstehenden geschlossenen Flächen die verlangte Gebietseinteilung aufweisen und zwar in völliger Regularität.

Hiebei werden sich also die für unsere Frage unbrauchbaren Fälle abscheiden:

1. wenn die Schliessung des Netzes in den verlangten Polygoncyklen überhaupt nicht gelingt und

2. wenn eine entstandene Einteilung unseren Anforderungen der Regularität nicht entspricht [vergl. § 1].

1. Die Schliessung eines Netzes zur Fläche überhaupt [1]) ist stets nur auf eine endliche Zahl von verschiedenen Weisen möglich; es ist also für jedes Netz auch nur eine endliche Zahl von Versuchen der Zusammenheftung zu machen und diese können wir überdiess mit Hülfe der Bedingungen der Regularität, die unsere Fläche erfüllen muss, in jedem Falle wesentlich beschränken.

Jene Anforderungen, die wir bisher lediglich aus der Regularität der Flächeneinteilung geschlossen haben, treten noch besser hervor, wenn wir die Eigenschaft der Flächen berücksichtigen, durch N Transformationen in sich überzugehen — es ist dies nur eine andere Ausdrucksweise der Regularität. Wir schicken desshalb einige diessbezügliche Sätze in der hier zur Verwendung kommenden speciellen Form voraus, während wir sie später bei der Betrachtung der Transformationen unserer Flächen überhaupt in allgemeiner Form wiederfinden werden.

Unter den Transformationen einer Fläche in sich finden sich auch die Ueberführungen der zu einem Cyklus vereinigten Blätter in einander; bei diesen bleibt also der Eckpunkt des betreffenden Cyklus, der ein $\nu$facher sein möge, fest. Haben wir diesen nun in die Mitte der Zeichnungsebene gelegt, so lassen sich diese Transformationen wegen der $\nu$fachen Regularität des Netzes als wirkliche Drehungen um diesen Mittelpunkt versinnlichen. Die „Periode“ dieser Transformationen ist $\nu$, d. h. die $\nu^{\text{te}}$ Wiederholung derselben führt die Blätter wieder in die Anfangslage zurück. Ist $\nu$ eine zusammengesetzte Zahl, so sind in diesem Cyklus der

---

1) Wir characterisiren sie durch Zuordnung je der entsprechenden Stücke unserer Rand-Curve.

Transformationen auch alle von der Periode irgend eines Teilers von $\nu$ enthalten. Bleiben nun bei einer Drehung von der Periode $\nu$ um jenen Mittelpunkt noch weitere Punkte fest, so können dies nur Punkte sein, um welche selbst Drehungen von der Periode $\nu$ stattfinden, also Punkte, in denen mindestens $\nu$ Blätter oder beliebige Vielfache $\varkappa . \nu$ von $\nu$ Blättern im Cyklus vereinigt sind. Ein solcher Punkt muss dann, falls er sich nicht als der unendlich ferne Punkt unserer Zeichnungsebene darstellt und so an sich bei jenen $\nu$ Drehungen fest bleibt, im Rande des Netzes $\nu$fach vorkommen und zwar in $\nu$fach symmetrischer Lage zum Centrum, weil er nur dann ebenfalls bei jenen $\nu$ Drehungen in sich übergeführt wird. Hat ferner $\nu$ einen Teiler $\mu$, so kann bei den Drehungen von der Periode $\mu$, die dann in jenen Drehungen enthalten sind, auch ein Punkt $\mu$ oder $\lambda . \mu$ [wo $\lambda$ irgend eine ganze Zahl] fest bleiben, der wiederum, wenn er nicht in's Unendliche fällt, $\mu$ mal in $\mu$facher Symmetrie sich auf dem Rande des Netzes finden muss. Beide Male ist dann das Netz so zu schliessen, dass jene $\nu$, beziehungsweise $\mu$ Punkte zu einem Punkte $\nu$ (ev. $\varkappa . \nu$) beziehungsweise $\mu$ (ev. $\lambda . \mu$) vereinigt werden.

Durch die so präcisirten Bedingungen der Regularität und Symmetrie wird die Vieldeutigkeit in der Zusammenhängung eines Netzes auf eine gewisse Zahl von Möglichkeiten beschränkt, durch welche die Fläche in den verlangten Polygoncyklen zu schliessen ist.

2. Die so entstandenen Flächeneinteilungen sind nun in Bezug auf ihre Regularität zu prüfen. Diese besteht in der Gleichberechtigung sämmtlicher congruenten Polygone, die man allgemein daran erkennt, dass die Gebiete der Fläche sich um jeden analogen Punkt [speciell also um die entsprechenden Eckpunkte] der einzelnen Polygone in genau derselben Weise lagern, dass also die Netze, die von entsprechenden Punkten als Netzmittelpunkten aus ent-

worfen werden, identisch sind bezüglich ihrer Anordnung und Schliessung. In vielen Fällen gibt sich übrigens die Irregularität einer Flächeneinteilung schon in der Irregularität ihrer Symmetrielinien zu erkennen.

Durch diese Discussionen übersehen wir die Unbrauchbarkeit gewisser Lösungen der diophantischen Gleichung aus der Unmöglichkeit regulärer Schliessung des Netzes, die Mehrdeutigkeit einer Lösung aber 1. aus einem möglichen mehrdeutigen Aufbau des Netzes und 2. aus der Möglichkeit, das betreffende Netz auf mehrere Weisen regulär zu schliessen.

Die folgenden Beispiele sollen das vorstehend auseinandergesetzte Verfahren der Untersuchung für einzelne Fälle näher illustriren. Wir haben zu erläutern, in wie weit die Beachtung unserer Regularitätsbedingungen die Vieldeutigkeit im Aufbau und in der Schliessung eines Netzes einzuschränken vermag [Beispiel 1 u. 2]; daran wird sich die Discussion der geschlossenen Netze knüpfen [Beispiel 3] und endlich führen wir zwei Beispiele mehrdeutiger Lösung aus einem Resultat der diophantischen Gleichung vor [Beispiel 4 und 5]. Die ersten drei Beispiele sind negative, — Fälle, in denen wir die Unmöglichkeit einer Zusammenhängung nachweisen. Die beiden letzten dagegen, als Beispiele wirklich regulärer Einteilungen, erläutern uns gleichzeitig, wie wir, nachdem eine erste Untersuchung eine Zusammenhängung als möglich gezeigt, uns nun exact von der völligen Regularität derselben zu überzeugen haben.

Bestreben war hier, die angewandten Methoden in möglichst einfacher Form zu characterisiren.

## § 5. Beispiele der Discussion von Lösungen der diophantischen Gleichung.

### 1. Beispiel.

Die diophantische Gleichung ergibt für $p = 2$ eine Lösung, welche die Einteilung einer Fläche in 18 schraffirte und ebensoviele nichtschraffirte Dreiecke verlangt, die an einer Stelle zu je 2, an einer zweiten zu je 3 und an einer dritten zu je 18 zusammenstossen. Wir bezeichnen dementsprechend — und analog stets in der Folge — diesen Fall kurz durch

$$[2, 3, 18],\ N = 18\ .$$

Indem wir zur Darstellung dieses Falles den Verzweigungspunkt 18 in die Mitte nehmen, ist der Aufbau des Netzes nur in einer Weise möglich und es ergibt sich sofort die in Tafel I gezeichnete Figur.

Die mit Ziffern bezeichneten Punkte des Randes sind dabei Eckpunkte 3, die jedesmal dazwischen liegenden Eckpunkte 2 unserer Flächeneinteilung. Um unsere Fläche in den verlangten Polygoncyklen zu schliessen, müssen wir je drei unserer Punkte 3 zu einem einzigen Punkte vereinigen und ebenso je zwei Punkte 2. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen fordern nun, dass wegen der Punkte 3 die Ecken 1, 7, 13, ebenso 2, 8, 14 u. s. w. zu je einem Cyklus von der Periode 3 vereinigt werden [ein Eckpunkt 3 kann nur bei Drehungen von der Periode 3 fest bleiben], während andererseits wegen der Punkte 2 die Ränder (1—2) mit (10—11), ferner (2—3) mit (11—12) u. s. w. zu verbinden wären. Dies ist unvereinbar: Die Fläche ist in der geforderten Verzweigung nicht regulär zu schliessen.

## 2. Beispiel.

Wie wir in einem weniger einfachen Falle schon beim Aufbau des Netzes unsere Regularitätsbedingungen zur Determination verwenden können, sollen die Fälle

$$[2, 4, 5],\ N = 40 \text{ und}$$
$$[2, 5, 5],\ N = 20,$$

die sich für $p = 2$ aus der diophantischen Gleichung ergeben, darlegen.

Um das Netz des ersten Falles zu entwerfen, wollen wir einen Punkt 5 in die Mitte legen und zeichnen also zunächst das mittlere Fünfeck [vergl. Tafel II, Fig. 1].

Die hier im Rande befindlichen Eckpunkte 4 können nicht zu identischen Cyklen 4 gehören, denn ein Eckpunkt 4 kann bei Drehungen von der Periode 5 nicht fest bleiben. Diese Punkte bilden also 5 verschiedene Cyklen von der Periode 4, die wir vervollständigen [Tafel II. Fig. 2].

Jetzt liegen auf dem Rande des Netzes Eckpunkte 5, die wir mit $5^a$ und $5^b$ bezeichnen; die Figur zeigt dann sofort: kein Punkt $5^b$ darf mit einem anderen $5^b$ vereinigt werden; denn wenn mit einem, so wäre er mit allen zu vereinigen und dies ist unmöglich. Gleiches gilt für die Punkte $5^a$. Wol aber könnten die Cyklen $5^a$ und $5^b$ paarweise unter sich vereinigt werden, dann können wir offenbar unser Netz in der durch Figur 3 [Tafel II.] angedeuteten Weise fortsetzen.

Vereinigen wir aber jetzt irgendwie je einen Punkt $5^a$ mit einem Punkt $5^b$, so ist unser Netz geschlossen, ohne die Zahl der Polygone zu erschöpfen. Also: auch die Cyklen $5^a$ und $5^b$ sind getrennte; dies ist aber auch unmöglich, da wir im ganzen nur 8 Cyklen von der Periode 5 auf der Fläche unterscheiden ($N = 40$): die verlangte Flächeneinteilung ist nicht herzustellen.

Noch kürzer erledigt sich der Fall

$$[2, 5, 5],\ N = 20.$$

Wir legen wieder einen Eckpunkt 5 in die Mitte und zeichnen zunächst den darum gelagerten Polygoncyklus [Tafel II. Fig. 4].

Dann müssen die Eckpunkte 5 des Randes entweder alle zusammen einen Eckpunkt 5 bilden und diess ist durch Vereinigung der Kanten nicht herzustellen, oder jeder gehört einem besonderen Cyklus an; aber auch dies ist unmöglich, denn wenn wir jetzt diese getrennten Cyklen vervollständigen, überschreiten wir die Zahl der überhaupt verfügbaren Polygone: die Flächeneinteilung ist unmöglich.

### 3. Beispiel.

Eine weitere für $p = 2$ aus der diophantischen Gleichung sich ergebende Lösung ist der Fall

$$[2, 3, 10], \; N = 30 .$$

Hiefür ergibt sich sofort, wenn wir einen Punkt 10 in die Mitte nehmen, das in Tafel III. dargestellte Netz.

Wegen der auf dem Rande befindlichen Punkte 2 ist der Schluss der Fläche nur möglich durch Verbindung je der gegenüberliegenden Ränder. Dadurch ist, wie man leicht sieht, die verlangte Verzweigung hergestellt; aber diese ist keine reguläre. Dies ergibt sich hier sofort durch Betrachtung der Symmetrielinien unserer Fläche. In jedem Punkte 3 derselben finden sich nämlich zweierlei Arten von Symmetrielinien: eine Symmetrielinie [2, 3, 10, 3] [1]) und zwei andere, welche gerade als fünffache Wiederholung dieser ersten sich darstellen. Dies ist aber nach dem § 3 über Symmetrielinien gesagten unmöglich. [2])

---

1) So wollen wir stets Symmetrielinien bezeichnen, indem wir sie, wie schon oben § 3 erwähnt, durch Art, Anzahl und Reihenfolge der Ecken characterisiren, welche sie enthalten.

2) Wir ersehen dies jetzt auch daraus, dass bei der Drehung um einen Punkt 3 jene verschiedenen Arten von Symmetrielinien in einander übergehen müssten, was ohne Zerreissung der Fläche unmöglich ist.

Also: Unsere Fläche ist in regulärer Verzweigung nicht herzustellen.

### 4. Beispiel.

Als erstes Beispiel einer mehrdeutigen Lösung aus einem Resultat der diophantischen Gleichung behandeln wir den für $p = 3$ sich ergebenden Fall

$$[7, 7, 7],\ N = 7\ .$$

Wir erhalten hiefür unmittelbar das in Tafel IV Fig. 1 gezeichnete Netz.

Dieses ist regulär zu schliessen durch die Verbindungen:

1.) 1— 4, 3— 6, 5— 8 etc.
2.) 1— 6, 3— 8, 5—10 etc.
3.) 1— 8, 3—10, 5—12 etc.
4.) 1—10, 3—12, 5—14 etc.
5.) 1—12, 3—14, 5— 2 etc.

Unmittelbar folgt dann aus der Figur, dass Fall (1.) mit (5.); Fall (2.) mit (4.) identisch ist. Indem wir ferner successive die 3 Punkte 7 in die Mitte unserer Netze rücken und dann die Verknüpfung der hierbei entstehenden Ränder aufsuchen, sehen wir, dass auch die Fälle (1.), (5.) und (3.) sich nicht von einander unterscheiden.

So bleiben noch zwei Fälle übrig. Diese aber sind von einander dadurch verschieden, dass bei dem ersten Falle [(1.); (3.); (5.)] zwei der Punkte 7 vor dem dritten ausgezeichnet sind, während bei dem zweiten Falle [(2.); (4.)] diese Punkte sämmtlich gleichberechtigt sind. Auch hievon überzeugen wir uns leicht, wenn wir wieder die 3 Punkte 7 successive zu Netzmittelpunkten machen.

### 5. Beispiel.

Ein weiteres Beispiel mehrdeutiger Lösung bildet der ebenfalls für $p = 3$ sich ergebende Fall

$$[2, 4, 8],\ N = 32.$$

Wir erhalten hiefür, einen Punkt 8 in die Mitte legend, ohne weiteres das in Tafel IV Fig. 2 dargestellte Netz.

Dieses ist nun mit der verlangten Verzweigung auf zweierlei Art regulär zu schliessen:

1. Durch Verbindung der Kanten:
   1—6; 3—8; 5—10; u. s. w.

2. Durch Vereinigung von:
   1—14; 3—16; 5—2; u. s. w.

Die beiden so entstehenden Flächen sind regulär eingeteilte. Wir überzeugen uns davon leicht, indem wir zunächst sehen, ob die Eckpunkte 8 alle gleichberechtigt sind; zunächst zeigt die Figur und die Art der Kantenverbindung, dass der Punkt a mit b gleichberechtigt ist; wir zeigen also noch, dass der Punkt c und etwa a sich ebenso verhalten wie der Netzmittelpunkt o, indem wir jene Punkte zu Netzmittelpunkten machen; dann ergibt sich, dass das Netz um diese Punkte sich in genau der obigen Weise anordnet und auch die Netzschliessung jedesmal die gleiche ist. Dass ferner alle Punkte 4 untereinander gleichberechtigt sind, übersieht man im vorliegenden Netze sofort, es ist also nur für irgend einen der Punkte 4 als Mittelpunkt das Netz zu zeichnen, welches dann „vierfach regulär“ wird, wie es sein muss. Die gleiche Untersuchung ist noch bezüglich der Punkte 2 zu machen.

Die beiden entstandenen Flächeneinteilungen sind nun von einander wesentlich verschieden. Dies zeigt hier schon die Betrachtung der Symmetrielinien. Beide Male unterscheiden wir drei verschiedene Arten derselben. Bei der ersten Fläche haben sie die Form:

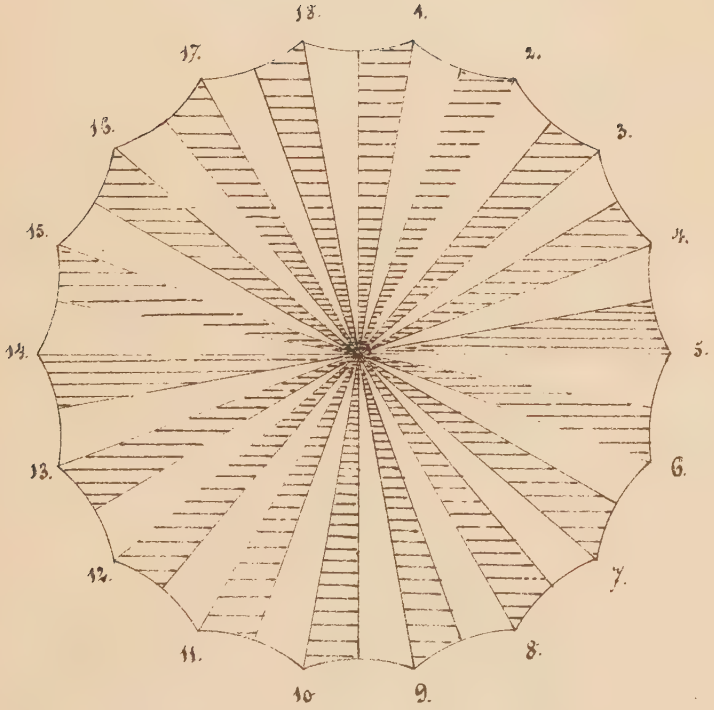
1. Art: [2, 8, 2, 8].
2. Art: [4, 8, 4, 8].
3. Art: [2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4].

Im zweiten Falle dagegen ist die dritte Art der Symmetrielinien, [die beiden ersten sind dieselben wie oben] von der Gestalt:

[2, 4, 2, 4].

Wir kommen in Teil II auf die beiden Flächen noch eingehend zu sprechen.

Tafel I.




Zu § 5, 1.

Tafel II.

Fig. 2.

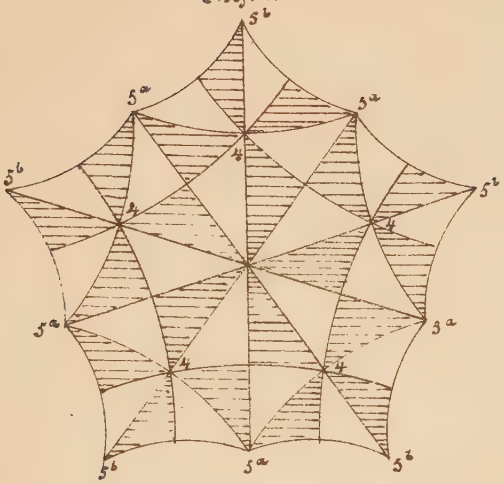



Fig. 1.

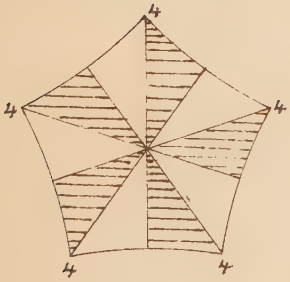



Fig. 4.

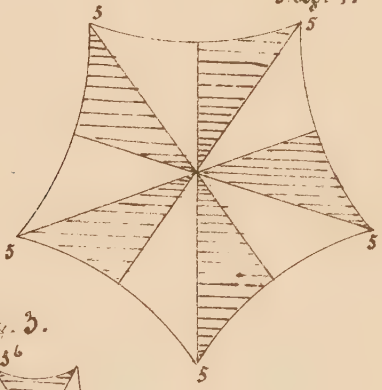
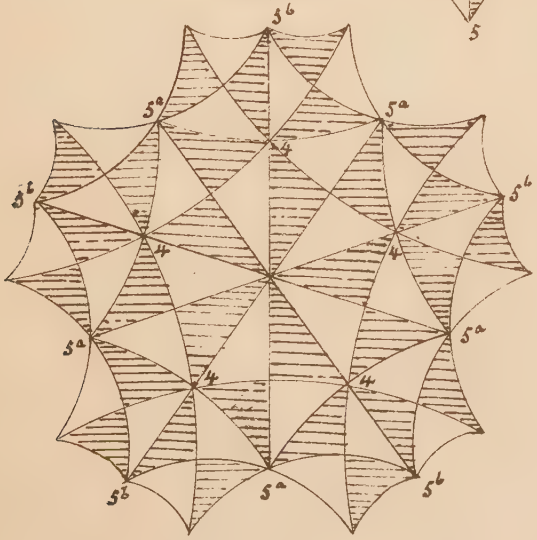
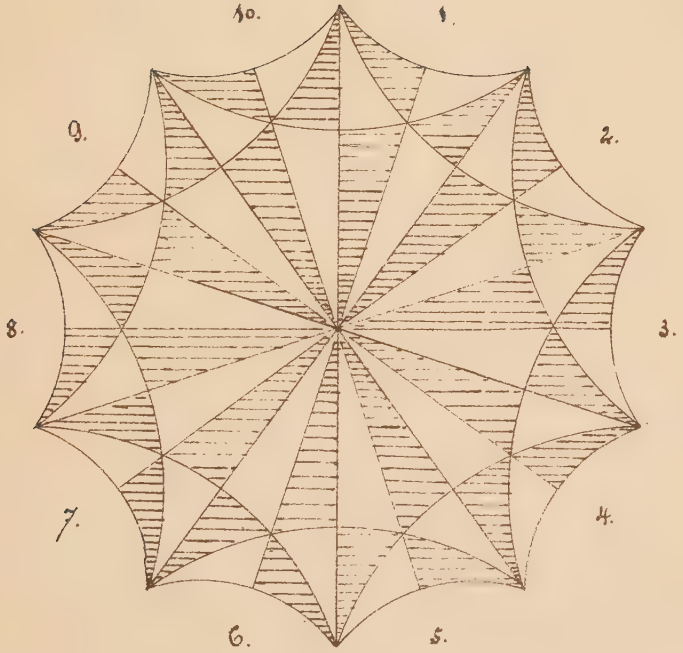



Fig. 3.




Zu § 5, 2.

Tafel III.




Zu § 5, 3.

# Tafel V.

Fig. 1.

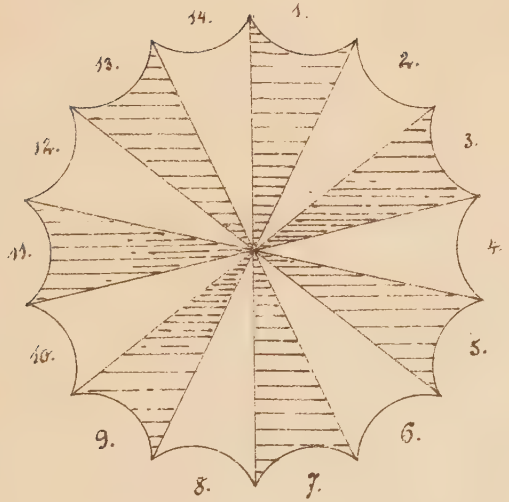
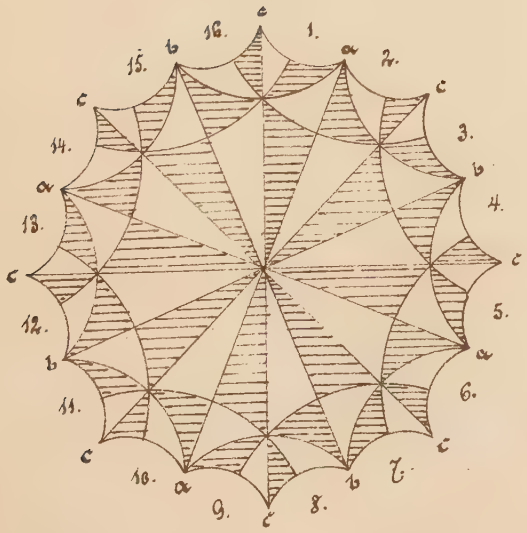



Fig. 2.




Zu § 5, 4, 5.

## Zweiter, gruppentheoretischer Teil.

### § 6. Die Gruppe der N eindeutigen Transformationen der Flächen in sich.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, characterisiren sich die N eindeutigen Transformationen an unseren Riemann'schen Flächen dadurch, dass wir ein Blatt in jedes andere und in sich selbst überführen; bei den stellvertretenden regulär eingeteilten Oberflächen also dadurch, dass wir ein schraffirtes [oder nichtschraffirtes] Polygon in sämmtliche andere schraffirte [bez. nichtschraffirte] und in sich selbst übergehen lassen. Durch jede dieser N Zuordnungen wird die Fläche eindeutig in sich transformirt. Ein Punkt z eines Blattes gelangt dabei im Allgemeinen an N—1 neue Stellen, nämlich die in der Riemann'schen Fläche gerade über — bez. unter ihm befindlichen, deren Bilder in der regulär eingeteilten Oberfläche als „homologe" Stellen in den N Polygonen bezeichnet sein mögen. Eine solche Punktgruppe von N Punkten bleibt also in ihrer Gesammtheit bei den N Transformationen ungeändert.

Eine erste Frage bei unseren Transformationen ist nun naturgemäss die: Gibt es Punktgruppen von weniger als N Punkten, die bei den N Transformationen in ihrer Gesammtheit ungeändert bleiben, oder anders ausgedrückt: Gibt

es Punkte, die bei gewissen unserer N Transformationen fest bleiben?

Ein derartiger Punkt muss offenbar mehreren Blättern zugleich angehören, dann bleibt er nämlich ungeändert bei den Vertauschungen eben jener Blätter. Solche in mehreren Blättern liegende Punkte der Riemann'schen Fläche sind aber Verzweigungspunkte derselben und wir können sagen:

Es gibt Punkte, die bei der Gesammtheit der N Transformationen weniger als N Lagen annehmen: die Verzweigungspunkte unserer Riemann'schen Fläche, also die Polygonseckpunkte unserer regulären Flächeneinteilung.

Ist die Verzweigung der Riemann'schen Fläche:

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots \nu_n$$

so gibt es Punktgruppen von nur

$$\frac{N}{\nu_1}, \frac{N}{\nu_2}, \frac{N}{\nu_3} \ldots \frac{N}{\nu_n}$$

Punkten. Wir bezeichnen sie als Gruppen bez. $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots \nu_n$ fach zählender Punkte.

Andere Punktgruppen von weniger als N Punkten gibt es nicht. [1])

Da eine Transformation, bei der ein Punkt fest bleibt, die Blätter, welche im Cyklus um jenen Punkt liegen, in einander überführt, so wollen wir alle Transformationen, bei welchen gewisse Punkte fest bleiben, als Drehungen um eben jene Punkte bezeichnen, während wir Transformationen der Fläche in sich, bei denen kein Punkt fest bleibt, als

1) Math. Annalen XIV. p. 435. — Man vergl. hier und für das folgende auch § 4, wo einiges hier allgemein erwähnte zu speciellem Zwecke vorausgeschickt ist.

Verschiebungen bezeichnen. Man darf dabei selbstverständlich nicht an eine stetige durch Drehen bez. Verschieben der Fläche in sich wirklich erzeugte Ueberführung denken. Unsere Transformationen sind, als unvermittelte Zuordnungen ganzer Gebietsteile, durchaus unstetige. Indem wir jedoch den Flächen auch ihrer ganzen Form nach eine entsprechende Regularität erteilen, [die natürlich mit ihrem p in Einklang stehen muss] gelingt es uns, gewisse Untergruppen unserer Transformationen in der Tat als ruckweise Drehungen bez. Verschiebungen [Drehungen um Axen, welche die Fläche nicht schneiden] zur Anschauung zu bringen;[1]) so mögen jene der Kürze halber angewandten Bezeichnungen gerechtfertigt erscheinen.

Handelt es sich nun um die wirkliche Aufstellung der N Transformationen einer Fläche in sich, so characterisiren wir zunächst die einzelnen Substitutionen durch ihre Perioden, die Anzahl der Wiederholungen ein und derselben Transformation bis zur Identität. Dann aber untersuchen wir das Verhalten unserer ausgezeichneten Punktgruppen bei diesen Transformationen. Bei Drehungen insbesondere fragen wir nach Zahl und Art der festbleibenden Punkte. Bleiben dann bei einer Drehung von der Periode $\mu$ [deren es um einen Punkt $\varphi(\mu)$ gibt, wo $\varphi$ die bekannte zahlentheoretische Function bezeichnet] a Punkte $\nu_1$ [$\mu$ ein Teiler von $\nu_1$] fest, während die übrigen Punkte $\nu_1$ in Gruppen zu je $\mu$ Punkten sich cyklisch vertauschen, so gibt es im Ganzen $\frac{N}{a \cdot \nu_1}$ getrennte Punktgruppen von je a Punkten $\nu_1$, deren jede bei $\varphi(\mu)$ Drehungen von der Periode $\mu$ fest bleibt. Alle diese $\frac{N}{a \cdot \nu_1} \varphi(\mu)$ Drehungen von der Periode $\mu$ sind unter sich

1) Man vergl. Annalen XIV. p. 466 ff. Unsere Netze bilden hier ein einfachstes Beispiel, indem sie die Drehungen um den Netzmittelpunkt sofort veranschaulichen. Wir kommen auf einige weitere Darstellungen noch im einzelnen Falle zu sprechen.

gleichberechtigt und ihr Vorhandensein folgt aus dem Vorhandensein einer derselben. Analog können wir auch gleichberechtigte Verschiebungen unterscheiden.

Greifen wir nun von allen so erhaltenen Systemen gleichberechtigter Transformationen je nur einen Repräsentanten heraus und von diesen wieder nur solche, deren Periode Primzahl oder Primzahlpotenz ist, so haben wir in diesen letzteren Substitutionen die Elemente, deren Combination die Gesammtgruppe ergibt. Indem wir aber auch alle partiellen Combinationen zu geschlossenen Gruppen machen, erhalten wir die Gesammtheit aller in der Gruppe unserer Transformationen enthaltenen Untergruppen.

Wir richten — im Hinblick auf die spätere Aufstellung der durch unsere Flächen definirten Irrationalitäten — unser Augenmerk insbesondere auf das Vorhandensein „ausgezeichneter Untergruppen“ und deren Anordnung in der Gesammtgruppe, beobachten also, ob unsere Gruppe einfach oder zusammengesetzt ist. Im letzteren Falle bestimmen wir die Factoren der Composition[1]), deren gegenseitige Anordnung unmittelbar den gruppentheoretischen Aufbau unserer Irrationalität versinnlicht.

Die geometrisch gegebene Definition unserer Gruppen legt nahe, auch diese weiteren Untersuchungen in geometrisches Gewand zu kleiden. Diese Darstellung bietet dann später auch für die functionentheoretischen Betrachtungen wesentlichen Vorteil. — So erwächst zunächst die Aufgabe, die eben angegebenen Eigenschaften, die wir an unseren Gruppen studiren wollen, geometrisch zu definiren.

1) Man vergl. Camille Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. pag. 41 ff. — Im Folgenden ist stets das C. Jordan'sche Werk citirt, weil dort die begrifflichen Definitionen der hier studirten gruppentheoretischen Eigenschaften kurz zusammengestellt sind.

## § 7. Eine geometrische Eigenschaft der in unseren Gruppen enthaltenen „ausgezeichneten" Untergruppen.

Ehe wir an die Untersuchung der Hauptfrage nach einem geometrischen Characteristicum »ausgezeichneter Untergruppen«[1]) gehen, sei eine geometrische Eigenschaft dieser Untergruppen erwähnt, die uns später von Nutzen ist. Vorerst geben wir in Kürze die begriffliche Definition einer solchen Untergruppe:

Sind S, S′ ... die Substitutionen einer gewissen Untergruppe, T, T′ . . . die Substitutionen, welche die Gesammtheit ausser diesen noch enthält, so heisst die Gruppe der S, S′ eine ausgezeichnete, wenn jede durch die Substitutionen T „transformirte" Substitution S wieder eine Substitution S′ der Untergruppe ist, wenn also die Beziehung:

$$T^{-1} S T = S'$$

statthat.[2])

Sei nun die vorgelegte Gruppe definirt durch eine in N Polygone mit den Ecken $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ regulär eingeteilte Oberfläche. Wenn dann eine ausgezeichnete Untergruppe Substitutionen von der Periode $\mu$ enthält, die einen der Punkte $\nu_1$ fest lassen [wo also $\mu$ ein Teiler von $\nu_1$], so muss sie alle Substitutionen von der Periode $\mu$ enthalten, welche in Drehungen um die Punkte $\nu_1$ bestehen.

Gesetzt, dies wäre nicht der Fall, und es möge unsere Untergruppe nur etwa Drehungen S, S′ . . . von der Pe-

1) Diese Bezeichnung rührt von S. Lie her.
2) Vergl. C. Jordan, a. a. O. p. 41.

riode $\mu$ um gewisse a der Punkte $\nu_1$ enthalten, während die Drehungen von der Periode $\mu$ um die übrigen b Punkte $\nu_1$ nicht zur Untergruppe gehören; dann gibt es in der Gesammtheit jedenfalls eine Substitution T, welche einen Punkt $b_1$ in einen Punkt $a_1$ überführt. Wir wenden diese an und hierauf eine Substitution S, nämlich eine Drehung von der Periode $\mu$ um einen Punkt $a_1$ [an dessen Stelle jetzt $b_1$ liegt], dann machen wir die Substitution T rückwärts, so kommt der Punkt $b_1$ [der bei der Substitution S fest geblieben], wieder in seine alte Lage zurück, die Substitution $T^{-1} S T$ [„die durch T transformirte Substitution S"] stellt also eine Drehung von der Periode $\mu$ um $b_1$ dar. Gehört nun T mit zu unserer Untergruppe, so auch die Substitution $T^{-1} S T$, was gegen die Voraussetzung, da in unserer Untergruppe nur Drehungen um die a Punkte $\nu_1$ enthalten sein sollen; gehört aber T nicht zu unserer Untergruppe, so müsste $T^{-1} S T = S'$ sein, wenn unsere Gruppe S . . . eine ausgezeichnete sein soll, aber auch das ist aus demselben Grunde nicht möglich: Unsere ausgezeichnete Untergruppe kann also nicht bloss einen Teil der Drehungen um die Punkte $\nu_1$ von der Periode $\mu$ enthalten, sondern, wenn überhaupt eine derselben, so enthält sie alle. Wir sagen kurz:

Eine ausgezeichnete Untergruppe, die eine gewisse Drehung enthält, muss auch alle gleichberechtigten [und das sind eben alle aus ihr transformirten] Drehungen enthalten. Genau das gleiche gilt bezüglich der Verschiebungen.

Umgekehrt aber: Gibt es in der Gesammtheit der Transformationen einer Gruppe eine Untergruppe, bestehend aus einer gewissen Zahl von Substitutionen und allen zu diesen gleichberechtigten, so ist diese Untergruppe eine ausgezeichnete.

## § 8. Flächendeformationen zur geometrischen Characterisirung ausgezeichneter Untergruppen.

Um die in unseren Gruppen enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen geometrisch ersichtlich zu machen, wollen wir unsere regulär eingeteilten Oberflächen gewissen Deformationen unterwerfen, welche uns gleichzeitig eine freiere Beweglichkeit in der geometrischen Auffassung gruppentheoretischer Operationen darbieten soll.

Die regulär eingeteilte Oberfläche war aus der ursprünglichen regulär verzweigten Riemann'schen Fläche durch die vollständige Auflösung der sämmtlichen Verzweigungspunkte entstanden. Wir wollen jetzt gewisse Uebergangsstadien dieser Deformation studiren, bei denen nicht mehr die sämmtlichen Windungspunkte der Riemann'schen Fläche aufgelöst erscheinen, sondern nur ein Teil derselben und wobei auch der einzelne Verzweigungspunkt $\nu$ als partiell aufgelöst, also etwa noch als Windungspunkt $\mu$, wo $\mu$ ein Teiler von $\nu$ ist, auftreten kann. Eine solche „Uebergangsform" ist dann allgemein gebildet aus einer frei im Raume gelegenen Riemann'schen Fläche vom Geschlechte $p_1$, welche mehrfach bedeckt ist und deren einzelne Blätter ganz allgemein 1. durch Verzweigungspunkte verknüpft sind und also längs gewisser Verzweigungsschnitte zusammenhängen, 2. längs geschlossener Curven in einander geschlungen sind [letzteres ist nur nötig in Fällen, wo $p_1 > 0$]. Die Totalität der Fläche soll dabei das Geschlecht p der Ausgangsform besitzen. Weiter enthält jedes Blatt für sich genommen eine [im Allgemeinen völlig irreguläre] Polygonteilung, der Art, dass die Gesammtfläche die ursprüngliche reguläre Einteilung aufweist in N Polygone, deren Cyklen teils neben-, teils übereinander gelagert sind.

Wir richten nun unser Augenmerk auf das etwaige Vorhandensein regulärer Uebergangsformen, und zwar wollen wir der präciseren Darstellung wegen zunächst

regulär verzweigte und

regulär durchschlungene Uebergangsformen

unterscheiden. Für erstere nehmen wir an, dass die Blätter der Fläche nur durch Verzweigungsschnitte, für letztere, dass sie nur längs geschlossener Curven untereinander zusammenhängen.

Die Combination beider zur allgemeinsten regulären Uebergangsform ergibt sich hiernach von selbst.

### a. Regulär verzweigte Uebergangsformen.

Darunter seien Uebergangsformen verstanden, deren M Blätter sämmtlich frei im Raume gelegene Riemann'sche Flächen vom Geschlechte $p_1$[1]) sind, die unter sich regulär verzweigt sind [diesen Begriff genau im früheren Sinne, wo $p_1 = 0$ war[2]), genommen] und wo die einzelnen Blätter selbst wieder je in gleicher Weise in P Polygone regulär eingeteilte Oberflächen darstellen. Dabei soll die Verzweigung der einzelnen Blätter untereinander an homologen Stellen der Gebietseinteilung des einzelnen Blattes stets die gleiche sein: so dass die Gesammtfläche eine in $N = M \cdot P$ Gebiete regulär eingeteilte Fläche vom Geschlechte p darstellt.

---

1) Wir bezeichnen in der Folge durchgängig mit $p_1$ das „Geschlecht des einzelnen Blattes" einer Uebergangsform. Dieser zur Abkürzung gebrauchte Ausdruck ist dabei zu verstehen als das Geschlecht, welches für ein einzelnes Blatt der Uebergangsform kommt, nachdem wir dieses von der ganzen Fläche losgetrennt und die dabei in demselben entstandenen Schnitte geschlossen haben.

2) Vergl. pag. 8.

Es ist für die folgenden Erörterungen zweckmässig, neben der Bezeichnung „Uebergangsform“ noch folgende Ausdrucksweisen auseinanderzuhalten:

1) Unter der regulär verzweigten Fläche der Uebergangsform sei die Fläche verstanden, welche die Uebergangsform bildet, wenn wir von der regulären Einteilung des einzelnen Blattes derselben absehen. Dies ist im Allgemeinen, weil $p_1 > o$ und nur im speciellen Falle $= o$ ist, keine regulär verzweigte Riemann'sche Fläche in dem in vorliegender Arbeit festgehaltenen Sinne.

2) Als die regulär eingeteilte Fläche der Uebergangsform sei weiter die Fläche bezeichnet, welche das einzelne Blatt der Uebergangsform bildet, das wir, von den übrigen losgetrennt, nur in Bezug auf seine reguläre Einteilung betrachten.

Die N Transformationen nun einer Fläche, welche eine regulär verzweigte Uebergangsform U besitzt, lassen sich zusammensetzen aus der Combination von:

1. Den Substitutionen S, S′ . . ., welche ein gewisses Polygon A in sämmtliche unter bez. über ihm befindlichen überführt.

Diese M Substitutionen — ich heisse sie kurz die verticalen — führen sämmtliche Polygone in ihre je über bez. unter ihnen gelegenen über; allgemein geht dabei aber nicht die Gesammtheit der Polygone eines Blattes in die Gesammtheit der Polygone eines anderen Blattes über; — dieser specielle Fall wird uns im nächsten Paragraphen beschäftigen.

2. Den Substitutionen T, T′ . . . , welche dasselbe Polygon A in sämmtliche mit ihm auf demselben Blatte gelegenen Polygone transformiren — den Horizontalsubstitutionen.

Analog gehen auch bei diesen die einzelnen Blätter der Fläche im Allgemeinen nicht in sich selbst über [vergl. den folgenden § 9.], aber je die übereinanderliegenden Polygone gehen wieder in übereinanderliegende über und ändern dabei im Allgemeinen nur die Reihenfolge ihrer Schichtung. Eine solche Substitution kann nämlich bezeichnet werden durch einen Weg, welcher vom Anfangsblatte ausgehend zum transformirten Blatte hinführt. Denkt man sich diese Linie durch alle Blätter markirt, so bildet sie die Wege, auf welchen die zur Verticalschicht des Anfangsblattes gehörigen Polygone transformirt werden in die Verticalschicht, welcher das transformirte Blatt angehört. In welcher Reihenfolge diese Zuordnung aber geschieht, hängt von den Verzweigungsschnitten ab, welche die einzelnen Blätter der Fläche verbinden und so die einzelnen „Transformationswege" individualisiren.

Für unsere Substitutionen ergeben sich dann sofort die folgenden Sätze:

1. Das System der M Verticalsubstitutionen bildet eine Gruppe, denn Iteration und Combination dieser Substitutionen ergeben stets wieder Substitutionen S, S′ . . . . Diese Gruppe ist holoedrisch [ein-eindeutig] isomorph mit der Gruppe der Substitutionen, welche durch die regulär verzweigte Fläche definirt ist, welche die Uebergangsform von der Gebietseinteilung der einzelnen Blätter abgesehen, bildet.

2. Das System der P Horizontalsubstitutionen bildet im Allgemeinen keine Gruppe. [vergl. den folgenden § 9.]

3. Die Gruppe der Verticalsubstitutionen bildet eine in der Gesammtheit ausgezeichnete Untergruppe. Zum Beweise machen wir die allgemeinste Substitution T, welche ein gewisses Polygon A einer bestimmten Verticalschicht $R_1$ in ein anderes B einer anderen

Verticalschicht $R_2$ überführt, dann eine Substitution S, welche dieses in ein Polygon derselben Verticalreihe $R_2$ übergehen lässt. Wenden wir hierauf $T^{-1}$ an, so kommen wir, nach dem oben über correspondirende Transformationswege gesagten, zu einem Polygon der ersten Verticalreihe $R_1$ zurück: also ist $T^{-1} S T = S'$ w. z. b. w.

b. Regulär durchschlungene Uebergangsformen.

Sie seien definirt als Uebergangsformen, bestehend aus M übereinanderliegenden frei im Raume gelegenen Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p_1$ [$p_1 > 0$], welche untereinander nur längs geschlossener Curven verbunden sind, aber nirgendwo untereinander verzweigt. Ausserdem bildet ein Blatt und in gleicher Weise jedes andere für sich eine regulär eingeteilte Oberfläche.

Die $2 . p_1$ von einander unabhängigen geschlossenen Curven, welche man auf einer Fläche vom Geschlechte $p_1$ verzeichnen kann, bilden nun die [bis auf eine stetige Verschiebung präcisirten] Stellen, in denen wir die Fläche durchschlingen können und die reguläre Durchschlingung besteht insbesondere darin, dass jedes Blatt genau so durchschlungen ist, wie jedes andere, dass also insbesondere, wenn an einer solchen Stelle gewisse $\nu$ Blätter cyklisch durcheinander geschlungen sind, dort die sämmtlichen Blätter zu je $\nu$ durchschlungen sind.

Auch hier setzt sich dann die Gruppe der Substitutionen, welche durch die reguläre Gesammtfläche vorgestellt ist, zusammen aus Vertical- und Horizontalsubstitutionen, welche genau wie oben bei a. definirt sind. Die Verticalsubstitutionen stellen, weil bei ihnen kein Punkt der Fläche fest bleibt — die Uebergangsform ist unverzweigt — Verschiebungen in den Transformationen der Gesammtheit dar. Sie bilden analog wie oben eine Gruppe, die ausgezeichnet ist in der Gesammtheit.

Das System der Horizontalsubstitutionen bildet keine Gruppe.

So erkennen wir, wenn es gelingt, einer vorgelegten regulär verzweigten Riemann'schen Fläche die Gestalt einer unserer regulären Uebergangsformen zu erteilen, unmittelbar eine in der Gesammtheit ausgezeichnete Untergruppe in der Gruppe der M blättrigen regulär verzweigten bez. regulär durchschlungenen Fläche dieser Uebergangsform.

Diese Untergruppen sind, wie schon oben pag. 37 erwähnt, allgemein nicht mehr dargestellt durch reguläre Riemann'sche Flächen im hier festgehaltenen Sinne, dies ist vielmehr nur der Fall, wenn wir eine regulär verzweigte Uebergangsform haben, deren einzelnes Blatt das Geschlecht $p_1 = 0$ hat.

## § 9. Zerfallende Gruppen.

Wir wenden uns zur Betrachtung des schon im vorangehenden Paragraphen erwähnten speciellen Falles, in welchem sowol die Vertical- als auch die Horizontalsubstitutionen der Uebergangsform für sich eine Gruppe bilden und zwar derart, dass bei den Verticalsubstitutionen die einzelnen Blätter der Uebergangsform in ihrer Totalität vertauscht werden und bei den Horizontalsubstitutionen je die einzelnen Blätter in sich übergehen.

Gruppentheoretisch sagt dies: Wir können die Polygone der Gesammtfläche so in Complexe von je gleichvielen zusammenordnen[1]), dass die Substitutionen der Gesammtheit sich combiniren:

1) Diese Zusammenordnung muss nicht notwendig in der Uebergangsform zu Tage treten. Dies ist vielmehr nur dann der Fall, wenn wir die Verzweigungsschnitte, welche die einzelnen

1. aus einer Gruppe von Substitutionen, bei welchen die einzelnen Complexe je in gleicher Weise in sich transformirt werden [die Gruppe der Horizontalsubstitutionen] und
2. einer Gruppe von Substitutionen, bei welchen diese Complexe in ihrer Totalität mit einander vertauscht werden [die Gruppe der Verticalsubstitutionen].

Eine Gruppe von solcher Beschaffenheit heisse zerfallend.

Zu ihrer näheren Characterisirung wollen wir noch weitere Deformationen mit unserer Fläche vornehmen.

Wir verwandeln unsere Uebergangsform für's erste wieder zurück in die Ausgangsform der N blättrigen Fläche und lösen dann so auf, dass jetzt die Gruppe der Verticalsubstitutionen sich als Gruppe von Horizontalsubstitutionen darstellt und umgekehrt. Dies ist in unserem Falle stets möglich, denn in der Ausgangsform sind die beiden getrennten Gruppen, deren Combination die Gesammtgruppe ergiebt, einander völlig gleichgestellt und bilden beide ausgezeichnete Untergruppen, deren jede als eine Gruppe von Verticalsubstitutionen dargestellt werden kann. Aber diese neue Uebergangsform $U_2$ besteht im allgemeinen nicht darin, dass die regulär verzweigte Fläche der ersten Uebergangsform $U_1$ zur regulär eingeteilten Fläche von $U_2$ gemacht wurde und umgekehrt die regulär eingeteilte Fläche der $U_1$ zur regulär verzweigten von $U_2$ [1]).

Unsere frühere regulär verzweigte Fläche hat nämlich an homologen Stellen der früheren Gebietseinteilung jedes einzelnen Blattes gleiche Verzweigung. Nun sind

---

Blätter der Uebergangsform verbinden, regulär anordnen, d. h. identisch anordnen in Bezug auf jeden homologen Punkt in der Einteilung der einzelnen Blätter. In Fig. 1 auf Tafel VI ist eine solche „reguläre Anordnung der Verzweigungsschnitte" versinnlicht. Die letzteren sind dabei durch Doppellinien kenntlich gemacht.

1) Vergl. die auf pag. 37 festgesetzte Terminologie.

in der $U_2$ die Polygone der früheren Gebietseinteilung [in $U_1$] übereinander gelegt worden, die homologen Stellen derselben befinden sich jetzt übereinander und so sind, was früher wesentlich getrennte Punkte in Bezug auf die regulär verzweigte Fläche waren, jetzt als übereinanderliegende Punkte keine verschiedenen Stellen in der regulären Einteilung des neuen Blattes [der $U_2$], welches der regulären Verzweigung von $U_1$ aequivalent ist. Wol aber besitzen jene beiden Flächen, die regulär $\begin{cases}\text{eingeteilte}\\ \text{verzweigte}\end{cases}$ der $U_1$ und die regulär $\begin{cases}\text{verzweigte}\\ \text{eingeteilte}\end{cases}$ der $U_2$ dieselbe Gruppe. So tritt uns hier zuerst die Eigenschaft unserer Gruppen entgegen, in Form ganz verschiedener Riemann'scher Flächen [die sich allgemein auch durch ihr Geschlecht unterscheiden] darstellbar zu sein. Wir behandeln diese Eigenschaft — die „Polytropie" einer Gruppe — im folgenden Paragraphen.

Jetzt halten wir folgendes Resultat fest:

Eine regulär verzweigte Uebergangsform, von der Eigenschaft, dass die Horizontal- und Verticalsubstitutionen je eine Gruppe bilden, bei welcher die einzelnen Blätter der Uebergangsform in sich transformirt, bez. in ihrer Totalität mit einander vertauscht werden, definirt eine zerfallende Gruppe. Einer solchen Uebergangsform ist eine zweite regulär verzweigte Uebergangsform conjugirt, für welche die Gruppe der Verticalsubstitutionen identisch ist mit der Gruppe der Horizontalsubstitutionen dort, und umgekehrt.

Sofort ergiebt sich dann, dass wir die Gesammtgruppe auch darstellen können, indem wir die Horizontalsubstitutionen der $U_1$ mit den Horizontalsubstitutionen der $U_2$ verbinden. Greifen wir dementsprechend ein Blatt A der $U_1$ heraus und

ebenso ein Blatt B der $U_2$, so haben wir in diesen regulär eingeteilten Blättern die Componenten vor uns, deren Combination die Gruppe ergiebt.

Die Polygone, in die jede dieser Flächen A und B geteilt ist, sind aber auch Polygone der Gesammtfläche und es findet daher zwischen einem Polygon der einen Fläche und einem Polygon der anderen ein punktweises Entsprechen statt. Wenn wir nun von einem Polygon der einen Fläche A ausgehend irgend einen [durch keinen „singulären" Punkt gehenden] Weg beschreiben, so lässt sich, wenn wir einen dem Ausgangspunkt auf A entsprechenden Punkt in irgend einem Polygon von B annehmen der analoge Weg in B verzeichnen. Kehren wir auf A zum Ausgangspunkte zurück, so sind wir allgemein in der Fläche B nicht zum Ausgangspunkte angelangt; sicher aber kommen wir nach einer endlichen Iteration dieses Weges [der ja jedesmal einer Transformation der Fläche B in sich aequivalent ist, und deren giebt es nur eine endliche Zahl] zum Ausgangspunkt zurück. Aber auch auf der ursprünglichen Gesammtfläche können wir den entsprechenden Weg beschreiben und dieser schliesst sicher erst dann, wenn beide Wege, sowol der in A, als der in B gleichzeitig sich schliessen. Damit ist deutlich, dass wir die Gesammtfläche erzeugen durch Simultanstellung der beiden Flächen A und B. Wir denken uns die Flächen A und B wieder in regulär verzweigte zurückdeformirt und beide übereinanderliegend über der Ebene der complexen Variablen ausgebreitet: Sind dann an einer Stelle $a_i$ die Blätter von A zu je $\nu_i'$ verzweigt, die der Fläche B zu je $\nu_i''$, so sind die Blätter der durch die Uebereinanderlagerung beider entstehenden Fläche an dieser Stelle zu je $\nu_i$ verzweigt, wo $\nu_i$ das kleinste gemeinschaftliche Multiplum von $\nu_i'$ und $\nu_i''$ ist.

Wir formuliren weiter den Satz: Kann eine Rie-

mann'sche Fläche durch die Uebereinanderlagerung zweier Riemann'schen Flächen erzeugt werden, so ist ihre Gruppe eine zerfallende und zwar zerfallend in die Gruppen der beiden übereinandergelegten Flächen.

Umgekehrt können wir jetzt auch durch Uebereinanderlagerung zweier regulär verzweigter Riemann'schen Flächen $F_1$ und $F_2$, von bez. $M_1$ und $M_2$ Blättern eine neue reguläre Fläche erzeugen, welche dann eine zerfallende Gruppe definirt. Die Blätterzahl derselben wird dann, wenn die beiden übereinandergelagerten Flächen „unabhängig" von einander sind $N = M_1 . M_2$ sein; die Verzweigung setzt sich dabei in der oben geschilderten Weise zusammen aus den Verzweigungen der beiden Flächen.

Können wir aber aus $F_1$ und $F_2$ je eine Uebergangsform ableiten, für welche die reguläre Einteilung der Blätter in beiden Flächen dieselbe und der Art ist, dass die in beiden Flächen homologen Stellen dieser Einteilungen bei der Uebereinanderlagerung sich decken, so kommt, wenn wir jetzt durch Combination der Transformationswege in beiden Flächen unsere resultirende Fläche bilden, nur ein Fläche von der Blätterzahl $N = \frac{M_1 . M_2}{L}$, wenn L die Ordnung jener durch die reguläre Gebietseinteilung der Uebergangsform definirten Fläche ist; denn ersichtlich setzen sich die Wege, welche wir in diesen beiden regulär eingeteilten Flächen der Uebergangsform ziehen, immer nur zu Wegen eben einer solchen Fläche zusammen, und so treten die zugehörigen Substitutionen nicht zweimal, sondern nur einmal zählend in der Gesammtheit auf.

Eine derartige Uebereinanderlagerung zweier Flächen mag als eine „Uebereinanderlagerung mit Reduction" bezeichnet sein.

Wir nennen gleichwol die Gruppe der entstandenen

Fläche eine zerfallende und zwar „uneigentlich zerfallend“ in die Gruppen von $F_1$ und $F_2$.

Die Ableitung der zerfallenden Gruppe, als eines speciellen Falles der zusammengesetzten Gruppe überhaupt, zeigt, dass wir die zerfallende Gruppe auch als bloss zusammengesetzte auffassen können, indem wir nur die Gestalt der regulären Uebergangsform dabei ins Auge fassen ohne Rücksicht auf ihre specielleren Eigenschaften; wir machen in der Folge von dieser Bemerkung Gebrauch, wenn es sich darum handelt, unsere für die verschiedenen p sich ergebenden regulär eingeteilten Oberflächen übersichtlich zusammenzustellen.

## § 10. Die Polytropie einer Gruppe.

Ehe wir dazu übergehen, mit den gewonnenen Mitteln die successive, vollständige Zerlegung einer Gruppe zu behandeln, wollen wir in Kürze die Eigenschaft einer Gruppe besprechen, in Form von wesentlich verschiedenen Riemann'schen Flächen darstellbar zu sein.

Der vorige Paragraph hat uns die Möglichkeit solcher Darstellungen gezeigt; gleichzeitig ist uns dort auch der Weg gegeben, solche verchiedene Formen einer Gruppe zu bilden, und zwar sofort unendlich viele.

Haben wir nämlich irgend eine Gruppe gegeben durch eine regulär verzweigte N blättrige Fläche $F_1$, so leite ich durch Ueberlagerung irgend einer zweiten M blättrigen Fläche $F_2$ „der Hülfsfläche“ eine neue M. N blättrige Fläche her [die $F_2$ muss also nur der Art sein, dass bei dieser Uebereinanderlagerung keine Reduction (§ 9.) eintritt], welche dann eine zerfallende Gruppe definirt. Zu ihr bilde ich [nach dem vorigen § 9.] die beiden conjugirten Uebergangsformen, und habe dann in der regulär verzweigten Fläche der einen Uebergangsform und in der regulär einge-

teilten der anderen zwei reguläre Flächen, welche die ursprüngliche Gruppe darstellen. Die regulär eingeteilte ist die Fläche $F_1$, von der wir ausgegangen sind, die zweite aber allgemein eine wesentlich neue; man kann sie die mit Hülfe von $F_2$ modificirte Form der Gruppe nennen.

Da die Fläche $F_2$ auf unendlich viele Weisen gewählt werden kann und jede der so entstehenden allgemein von einander verschiedenen Formen gleicherweise durch Flächen $F_2$ modificirt werden kann, erkennt man unmittelbar den Satz:

Jede Gruppe ist auf unendlich viele Arten in Gestalt regulärer Riemann'scher Flächen darstellbar, wenn sie überhaupt auf eine Weise so darstellbar ist.

Speciellen Falles kann eine Fläche bei unserem Process auch in sich übergeführt werden.

Ich entscheide vorerst noch nicht, ob mit dieser Methode alle überhaupt möglichen Darstellungen einer Gruppe als Riemann'scher Fläche umfasst werden.

## § 11. Die successive Decomposition unserer Gruppen.

Die in den vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Methoden ermöglichen nun die völlige Zerlegung der von uns behandelten Gruppen in ihre einfachen Bestandteile und wir haben dabei der Reihe nach die folgenden Schritte auszuführen:

1. Wir untersuchen, ob die Gruppe einfach oder zusammengesetzt ist. Eine Gruppe ist einfach, wenn sie [ausser der identischen Substitution] keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt, zusammengesetzt im entgegengesetzten Falle. Hier also: Die Gruppe ist einfach, wenn

es nicht gelingt, aus der zugehörigen regulär verzweigten Riemann'schen Fläche eine regulär verzweigte bez. durchschlungene Uebergangsform abzuleiten, zusammengesetzt im entgegengesetzten Falle. Die Untersuchung einer einfachen Gruppe ist damit, vom gruppentheoretischen Standpunkte aus, zunächst abgeschlossen. Für die zusammengesetzte Gruppe fragen wir weiter:

2. Ist die Gruppe zerfallend oder nicht zerfallend. Gelingt uns die Erzeugung der unsere Gruppe definirenden Riemann'schen Fläche F in der § 9 gemeinten Weise durch Uebereinanderlagerung zweier regulären Riemann'schen Flächen F′ und F″, so ist die Gruppe zerfallend in die Gruppen dieser beiden Flächen. An diese wendet sich dann gleicherweise die Untersuchung, und indem wir diesen Process soweit möglich fortsetzen, erhalten wir eine Reihe von Flächen $F_1$, $F_2$, $F_3$ ...., welche jetzt nichtzerfallende Gruppen definiren und deren Uebereinanderlagerung die Fläche F erzeugt. Wir heissen dann diese Flächen die Componenten, in welche die vorgelegte Gruppe zerfällt. Die Blätterzahlen $M_1$, $M_2$, $M_3$ .... derselben mögen als die Factoren des Zerfallens bezeichnet sein. Dabei ist $M_1 . M_2 . M_3 .... = N$, sofern die Uebereinanderlagerung eine einfache ist, und wir heissen dann die Gesammtgruppe eigentlich zerfallend. Tritt jedoch [und dies ist die allgemeinere Art der Uebereinanderlagerung] eine Reduction im oben gemeinten Sinne [§ 9, pag. 44] ein, so ist $N = \frac{M_1 . M_2 . M_3 ....}{L^{l-1} P^{p-1} ....}$; wenn L, P .... die Ordnungen jener gemeinsamen Flächen, l, p.... die Anzahl bezeichnet, in welcher sie sich in den Componenten der Fläche finden; wir bezeichnen dann die Gruppe als uneigentlich zerfallend in die Flächen $M_1, M_2, M_3$ ....

Die Zerlegung einer Fläche in ihre nichtzerfallenden Bestandteile kann nun entweder nur auf eine oder auf

mehrere Arten möglich sein und wir wollen darnach ein- und mehrdeutig zerfallende Gruppen unterscheiden; dabei kann es auch vorkommen, dass gemäss einer Zerlegung die Gruppe eigentlich zerfallend ist, während sie sich gemäss einer anderen als uneigentlich zerfallend darstellt.

Nach Zerlegung der Gruppe in ihre nichtzerfallenden Bestandteile haben wir

3. die Frage nach der Einfachheit bezw. Zusammensetzung dieser letzteren zu beantworten. Ist eine Gruppe zusammengesetzt, so können wir[1]) eine Reihenfolge von Untergruppen aufstellen, deren jede ausgezeichnet in der unmittelbar vorhergehenden enthalten ist und dabei nicht gleichzeitig Teil einer dort enthaltenen umfassenderen ausgezeichneten Untergruppe.[2])

Geometrisch suchen wir also zunächst eine Uebergangsform zu der regulär verzweigten Riemann'schen Fläche derart, dass die Gruppe ihrer Verticalsubstitutionen in keiner „umfassenderen" Uebergangsform dieser Fläche in Form von Verticalsubstitutionen enthalten ist. Die regulär verzweigte und durchschlungene Fläche, welche diese Uebergangsform von der Gebietseinteilung des einzelnen Blattes abgesehen im Allgemeinen bildet [i. e. die in der Ausgangsfläche enthaltene ausgezeichnete Untergruppe], untersuchen wir dann analog auf ausgezeichnete Untergruppen[3]) u. s. f.

---

1) C. Jordan. a. a. O. pag. 41 ff.

2) Die Herstellung einer solchen Reihenfolge ausgezeichneter Untergruppen ist [vergl. die Schlussbemerkung des § 9] auch für jede zerfallende Gruppe möglich; doch wird man, wenn es sich um die systematische Zerlegung der Gruppe handelt, diese zweckmässigerweise immer erst in ihre nichtzerfallenden Bestandteile trennen.

3) Indem nun diese weiteren so kommenden Flächen [vergl. auch die Schlussbemerkung des § 8. pag. 40.] allgemein nicht mehr regulär verzweigte Riemann'sche Flächen im gewöhnlichen Sinne darstellen, erwächst uns die Aufgabe der Untersuchung auch solcher in allge-

Dabei kann es vorkommen, dass in einer der so successive auftretenden Flächen mehrere Uebergangsformen enthalten sind, deren keine die andere umfasst; dann greifen wir zunächst irgend eine derselben zu weiterer Decomposition heraus; ebenso mit den anderen verfahrend, erhalten wir dann mehrere Reihen von Zerlegungen, deren keine vor der anderen bevorzugt ist. Wir wollen dann [analog wie oben bei den zerfallenden Gruppen] sagen, die betr. Gruppe lässt eine mehrdeutige Decomposition zu. Ferner kann eintreten, dass gewisse Gruppen unserer Reihenfolge ihrerseits wieder zerfallende sind [ohne dass darum die Gesammtgruppe eine zerfallende ist]. Wir zerlegen sie dann in ihre nichtzerfallenden Bestandteile, deren jeder für sich weiter zu discutiren ist[1]).

Die Zergliederung der Gruppe erreicht ihr Ende, wenn wir bei einfachen Gruppen angekommen sind, welche also nur die identische Substitution [1] ausgezeichnet enthalten.

Die Blätterzahlen $N_1$, $N_2$, $N_3$ .... $N_k$, 1 der successive

---

meinerer Form geometrisch definirten Gruppen bezüglich ihrer Zusammensetzung. Wir leiten zu dem Ende auch hier gewisse Uebergangsformen ab, und unterscheiden dadurch ein System von Vertical- und Horizontalsubstitutionen. Ersteres kennzeichnet wie früher die ausgezeichnete Untergruppe; das letztere, allgemein keine Gruppe bildend, ist characterisirt durch eine „reguläre Gebietseinteilung" der Blätter unserer Uebergangsform. Der Begriff einer regulär eingeteilten Fläche erfährt dabei die analoge Erweiterung, wie eben der Begriff der regulär verzweigten Riemann'schen Fläche. Wie wir dort das Geschlecht des einzelnen Blattes auch grösser als o angenommen haben, so wird hier das einzelne Polygon der Gebietseinteilung einen höheren Zusammenhang haben als 1.

Indem jedoch die hier anzuwendenden Operationen einen ganz analogen Weg verfolgen, wie jene dort, so sehen wir von ihrer allgemeinen Formulirung ab und begnügen uns, sie in den folgenden Beispielen des § 12 an geeigneter Stelle zu kennzeichnen [vergl. pag. 58 und 60].

1) Vergl. hiezu die vorige Anmerkung.

gebildeten Uebergangsformen sind unmittelbar die Ordnungen der successive ausgezeichneten Untergruppen [i. e. die Anzahlen der jedesmaligen Verticalsubstitutionen]; die Zahlen $\frac{N}{N_1}, \frac{N_1}{N_2}, \frac{N_2}{N_3}, \ldots \frac{N_k}{1}$ geben dann die Zahl der Horizontalsubstitutionen jeder Uebergangsform an: Es sind die Factoren der Composition unserer Gruppe. Jene Gruppen aber, die durch die regulären Einteilungen je der einzelnen Blätter unserer successiven Uebergangsformen definirt sind, bilden die einfachen Gruppen, aus deren Composition die Gesammtgruppe entsteht.

Die Reihenfolge der Factoren der Composition gibt uns die Reihenfolge der Zerlegung unserer Gruppe an. Die oben auch geometrisch erkannte Mehrdeutigkeit dieser Zerlegung spricht sich in der Vertauschbarkeit gewisser Factoren der Composition aus. Ergab eine der Uebergangsformen eine zerfallende Gruppe, so stellen sich die Factoren der Composition für die Zerlegung derselben in ihre nichtzerfallenden Bestandteile als gleichmässig berechtigte neben einander. [Dabei ist noch eine mögliche Vieldeutigkeit dieser Zerlegung sowie die Möglichkeit einer Reduction bei der Uebereinanderlagerung (pag. 47) zu beachten.]

Die folgende Zusammenstellung zeigt in gedrängten Definitionen die für die Untersuchung unserer Gruppen massgebenden, bisher gewonnenen Gesichtspunkte.

## Uebersicht

über die durch unsere geometrischen Betrachtungen gewonnene Classifizirung unserer Gruppen.

**Gruppe G,**

definirt durch eine regulär verzweigte bez. durchschlungene Fläche F.

**Einfache Gruppe.**

Die Fläche F besitzt keine reguläre Uebergangsform.

**Zusammengesetzte Gruppe.**

Die Fläche F besitzt wenigstens eine reguläre Uebergangsform.

**Nichtzerfallende Gruppe.**

Die Fläche F kann nicht durch „Uebereinanderlagerung" von Flächen $F_1, F_2 \ldots$ erzeugt werden.

**Zerfallende Gruppe.**

Die Fläche F kann durch „Uebereinanderlagerung" mehrerer Flächen $F_1, F_2 \ldots$ erzeugt werden.

**Gruppe mit eindeutiger Decomposition.**

Es existirt nur „eine umfassendste Uebergangsform."

**Gruppe mit mehrdeut. Decomposition.**

Es existiren mehrere gleichgestellte „umfassendste Uebergangsformen."

**Eindeutig zerfallende Gruppe.**

Es existirt nur eine Reihe von „componirenden Flächen" $F_1, F_2 \ldots$

**Mehrdeutig zerfallende Gruppe.**

Es existiren mehrere Reihen von „componirenden Flächen" $F_1, F_2 \ldots$

**Uneigentliches Zerfallen.**

Die Uebereinanderlagerung der Flächen $F_1, F_2 \ldots$ ist eine „Uebereinanderlagerung mit Reduction."

**Eigentliches Zerfallen.**

Die Uebereinanderlagerung der Flächen $F_1, F_2 \ldots$ ist eine „Uebereinanderlagerung ohne Reduction."

Weitere Untersuchung der durch die Verticalsubstitutionen der Uebergangsformen definirten Gruppen.

Weitere Untersuchung der nichtzerfallenden Bestandteile unserer Gruppe.

Um nun ein vollständiges Bild der Composition einer zu untersuchenden Gruppe G zu entwerfen, stellen wir für sie zwei Schemata auf: das eine Schema I zählt die regulär verzweigten und durchschlungenen Flächen auf, welche in den successive auseinander abgeleiteten Uebergangsformen als Definitionen der ausgezeichneten Untergruppen auftreten; das Schema II jene einfachen Gruppen, denen das System der jedesmaligen Horizontalsubstitutionen entspricht und welche in der regulären Einteilung der Blätter der Uebergangsformen vorliegen.

In beiden Schematen, deren letzteres uns unmittelbar auch die Factoren der Composition ergibt, characterisiren wir den gruppentheoretischen Aufbau der Gesammtfläche auch noch durch die Stellung der einzelnen Glieder. Dabei sind für das erste Schema Formen übereinandergestellte, wenn die folgende Fläche als ausgezeichneter Teil in der vorhergehenden enthalten ist, nebeneinandergestellte, wenn die betr. Formen als Componenten des Zerfallens für die nächst höhere Form, die dann eine zerfallende Gruppe definirt, erscheinen. Der Aufbau wird sich da verästeln, wo wir auf mehrere Weisen aus einer Fläche ausgezeichnete Untergruppen ausscheiden können, deren keine die andere umfasst. Dann ist die Decomposition auf mehrere Weisen möglich, die zwar dieselben Zahlen als compositionelle Factoren ergeben[1]), aber in verschiedener Anordnung und durch verschiedene Flächen definirt. Die Anordnung des Schema's II läuft — weil für jede Uebergangsform in Schema I die reguläre Verzweigung [Durchschlingung] der Blätter, in Schema II die reguläre Einteilung des einzelnen Blattes gegeben ist — mit der des Schema's I parallel.

---

1) Nach dem Satz von der Erhaltung der Factoren der Composition; vergl. C. Jordan a. a. O. pag. 42.

## § 12. Characteristische Beispiele zu unseren Gruppenbetrachtungen.

### I. 1.

Die gewonnenen Resultate an einem Beispiele des näheren zu exponiren, behandeln wir zunächst die Gruppe des Octaeders, die bekannte Gruppe der Permutationen von vier Elementen.

Wir können die Gruppe definiren durch eine 24blättrige Riemann'sche Fläche mit der Verzweigung [2, 3, 4] vom Geschlechte p=o.[1])

Indem wir in der § 6 [pag. 31] geschilderten Weise die Substitutionen der Gruppe durch die Elementarsubstitutionen characterisiren und dabei angeben in welcher Multiplicität die einzelnen gleichberechtigten Substitutionen dabei auftreten, kommt folgende Tabelle der Transformationen:

| Transformationen: | Zahl der festbleibenden Pkte: 2 | 3 | 4 | Zahl der Transf. |
|---|---|---|---|---|
| 1. Drehungen um die Pkte 4 [v. d. Periode 4 | | — | 2 | 3 . 2 = 6 |
| 2. „ „ „ „ 4 [„ „ „ 2 | — | — | 2 | 3 . 1 = 3 |
| 3. Drehungen um die Pkte 3 [v. d. Periode 3 | — | 2 | — | 4 . 2 = 8 |
| 4. Drehungen um die Pkte 2 [v. d. Periode 2 | 2 | — | — | 6 . 1 = 6 |
| 5. Die identische Transf. [v. d. Periode 1 | alle Pkte | | | 1 . 1 = 1 |

Gesammtzahl: 24.

Diese sämmtlichen Drehungen sind hier natürlich [wie bei allen Fällen p=o] durch ruckweise Drehungen einer Kugel in sich unmittelbar zu veranschaulichen, indem wir auf ihr die Einteilung eines regulären Octaeders verzeichnen,

1) Vergl. hier: Schwarz. a. a. O. Borchardt's Journal Bd. 75 pag. 323; Klein, Math. Annalen Bd. IX. p. 186; Puchta „Das Octaeder und die Gleichung vierten Grades". Denkschriften der Wiener Acad. d. W. Bd. XLI. 1879.

dessen Seitendreiecke noch durch die Höhen geteilt sind. Figur 1 auf Tafel V stellt die so eingeteilte Kugel in stereographischer Projection dar.

Unsere Fläche besitzt zwei Uebergangsformen, die eine gebildet aus 12 Blättern, die nach dem „Kreisteilungstypus“ [2,2], N = 2 [1]) [$p_1$ = o] in vier abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Zweiecke zerlegt sind. Figur 2 auf Tafel V stellt ein Blatt dieser Uebergangsform dar. Die Blätter sind unter sich nach dem „Tetraedertypus“ [1]) verzweigt, so dass [vergl. die Figur] bei a die Blätter zu je zweien, an den homologen Stellen b und c zu je dreien zusammenhängen.

Die Gesammtfläche hat dann ersichtlich die Verzweigung [2, 3, 4] des Octaeders.

Die zweite Uebergangsform entsteht, wenn wir vier nach dem Doppelpyramidentypus[1]) [3, 2, 2], N = 6 [$p_1$ = o] regulär eingeteilte Blätter an den drei in der Zeichnung [Figur 3 auf Tafel V] markirten [homologen] Stellen zu je zweien regulär verzweigen. Diese Verzweigung definirt einen Doppelpyramidentypus [2, 2, 2], N = 4.

So sehen wir sofort: Die Gruppe des Octaeders enthält als ausgezeichnete Untergruppen die Gruppe des Tetraeders und die Gruppe des Doppelpyramidentypus [2, 2, 2] N = 4.

Indem wir aber jetzt das Tetraeder weiter untersuchen, erkennen wir, dass es eine Uebergangsform besitzt, welche entsteht durch die Uebereinanderlagerung von vier nach dem Kreisteilungstypus [3, 3], N = 3 $p_1$ = o regulär eingeteilten Blättern, die unter sich wieder an drei homologen Stellen zu je zweien zusammenhängen. [Figur 4 auf Tafel V]. Das Tetraeder enthält also jenen Doppelpyramidentypus [2, 2, 2] N = 4 gleichfalls ausgezeichnet, und wir werden, unseren Festsetzungen [§ 11 pag. 48 ff.] gemäss, diesen in der Reihenfolge

1) Vergl. die vorige Anmerkung.

der successive ausgezeichneten Untergruppen dem Tetraeder nachzusetzen haben.

Der Doppelpyramidentypus [2, 2, 2], N = 4 ist nun seinerseits wieder darstellbar durch doppelte Ueberdeckung eines nach dem Kreisteilungstypus [2, 2] N=2 geteilten Blattes [$p_1$=o] unter Verzweigung der beiden Blätter an zwei Stellen [Figur 5 auf Tafel V].

In dieser Uebergangsform bilden ersichtlich auch die Horizontalsubstitutionen eine Gruppe; die Gruppe der Fläche [2, 2, 2], N=4 ist eine zerfallende; wir können sie erzeugen durch Uebereinanderlagerung zweier Kreisteilungstypen [2, 2] deren einer an den Stellen a, b, der andere bei b und c verzweigt ist. Wir drücken dies kurz aus durch die Schreibweise:

| a | b | c | |
|---|---|---|---|
| [2 , 2] | — | | N = 2 |
| — | [2 , 2] | | N = 2 |
| [2 , 2 , 2] | | | N = 4 |

In diesen Kreisteilungstypen sind wir zu einfachen Gruppen gelangt: unsere Gesammtgruppe ist völlig zergliedert.[1])

1) Wir führen hier noch in Kürze eine andere Art, die Zergliederung vorzunehmen an: Indem wir in der regulären Gebietseinteilung des Octaeders zwei Nebendreiecke in der Weise, wie es Figur 6 auf Tafel V andeutet, zusammenfassen, erhalten wir die reguläre Einteilung des Tetraeders. Sechs Nebendreiecke zusammennehmend [siehe Figur 7 auf Tafel V] die reguläre Einteilung des Doppelpyramidentypus [2, 2, 2] N=4. Diese Zusammenziehungen sind dabei so bewerkstelligt, dass alles in der ursprünglichen Figur der Octaederteilung gleichberechtigte auch in gleicher Weise behandelt wurde. Die Möglichkeit einer solchen Zusammenziehung zeigt, wie aus dem § 7 gesagten sofort zu folgern, stets eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit an. Es ist diese Art der geometrischen Auffassung ausgezeichneter Untergruppen ersichtlich nur ein ganz specieller Fall unserer oben allgemein gegebenen.

Unmittelbar können wir also jetzt nach § 11 [pag. 52] die beiden parallelen Schemata zur Darstellung unserer Gruppe bilden:

| Schema I. | | Schema II. | |
|---|---|---|---|
| [2, 3, 4] N = 24 | | | |
| [2, 3, 3] N = 12 | | [2, 2] N = 2 | |
| [2, 2, 2] N = 4 | | [3, 3] N = 3 | |
| zerfallend in: | | | |
| [2, 2] N = 2 | [2, 2] N = 2 | | |
| [1] | [1] | [2, 2] N = 2 | [2, 2] N = 2 |

2.

Um eine Fläche kennen zu lernen, welche die Tetraedergruppe in einer modificirten Gestalt darstellt, lagern wir [§ 10] die Riemann'sche Fläche des Tetraeders und einen Kreisteilungstypus [2,2] N = 2 in folgender Weise übereinander:

$$\begin{array}{ll} & [2, 3, 3] \quad N = 12 \\ & [2 \;-\; 2] \quad N = \;\; 2 \\ \hline \text{so kommt} & [2, 3, 6] \quad N = 24, \end{array}$$

eine Fläche vom Geschlechte $p = 1$.

Diese Fläche besitzt zwei Uebergangsformen $U_1$ und $U_2$. Die $U_1$ entsteht, wenn wir eine nach dem Tetraedertypus regulär eingeteilte Kugel doppelt überdecken und die beiden so entstandenen Blätter an den vier Tetraederecken untereinander verzweigen. Wir geben beifolgend [Figur 1, Tafel VI] die so entstehende Figur, in der die Kugel in stereographischer Projection erscheint und welche als doppelt überdeckt zu denken ist; die doppelt gezeichneten Linien haben die Bedeutung von Verzweigungsschnitten. Wir erkennen hier gleichzeitig ein Beispiel jener regulären Anordnung der Verzweigungsschnitte, von der wir oben § 9 [pag. 40, Anm.] anlässlich der zerfallenden Gruppen gesprochen haben.

Die $U_2$ besteht aus einer zwöltblättrigen Fläche. Das einzelne Blatt ist nach dem Kreisteilungstypus [2 , 2] N=2 ($p_1$=o) regulär eingeteilt [Figur 2, Tafel VI], und die sämmtlichen Blätter hängen an den drei in der Figur markirten Stellen zu je dreien zusammen: So entsteht die Verzweigung der Gesammtfläche [2 , 3 , 6] N=24, während die regulär verzweigte Fläche, welche die $U_2$, von der Polygonteilung des einzelnen Blattes abgesehen, bildet, als Fläche [3 , 3 , 3] N=12 zu bezeichnen ist. Die Gruppe dieser Fläche ist dieselbe wie die Tetraedergruppe, nur stellen sich die Transformationen in anderer Weise dar. Wir zählen zum Vergleiche in Kürze die Transformationen dieser neuen Fläche hier auf:

| Transformationen | Zahl der festbleibenden Pkte $3^a$ | $3^b$ | $3^c$ | Zahl der Transf. |
|---|---|---|---|---|
| 1. Drehungen um die Pkte $3^a$ Periode 3 | 1 | 1 | 1 | 4 . 2 = 8 |
| 2. „ „ „ „ $3^b$ „ | 1 | 1 | 1 | schon unter |
| 3. „ „ „ „ $3^c$ „ | 1 | 1 | 1 | 1. aufgezählt |
| 4. Verschiebungen von der Periode 2 | ——— | | | 2 . 2—1=3 |
| 5. Identische Transformat. v. d. Periode 1 | alle Pkte | | | 1 . 1=1 |

Gesammtzahl =12.

Der Vergleich dieser Tabelle mit der zu Anfang aufgestellten [wir brauchen dort (pag. 53) bloss die Ziffern 1 und 4 wegzulassen, um die Tetraedersubstitutionen zu erhalten] zeigt dann unmittelbar die verschiedene Form, in der die Gruppe beidemal auftritt. Bei Drehungen von der Periode 3 bleiben dort 2, hier 3 Punkte 3 ungeändert; den Drehungen von der Periode 2 dort entsprechen hier Verschiebungen von gleicher Periode.

Wir behandeln noch die Zerlegung unserer Gruppe, indem wir jetzt als Gruppendefinition die Fläche [3 , 3 , 3] N=12 p=1 zu Grunde legen. Dabei muss selbstverständlich

das frühere Resultat kommen. In dieser Form liefert uns aber die Gruppenuntersuchung ein erstes Beispiel einer regulär durchschlungenen Fläche und zeigt deren weitere Deformation zur Erkennung ausgezeichneter Untergruppen, allerdings in einfachster Form[1]).

Breiten wir zunächst das Flächennetz in die Ebene aus, so können wir ihm die auf Tafel VI Figur 3 verzeichnete Gestalt geben [in der nur die ausgezogenen Linien Begrenzungen der einzelnen Gebietsteile vorstellen].

In dieser Form übersehen wir die Verschiebungen der Fläche in sich sofort als wirkliche Verschiebungen in Richtung der beigezeichneten Pfeile.

Schliessen wir jetzt den Ring durch Vereinigung der Ränder 1—3 und 2—4, so zwar, dass wir ihn vorerst in Richtung der Meridian- und in Richtung der Breiten-Curve je einmal übereinanderschieben und dann erst die entsprechenden Blätter vereinigen, so kommt ein vierfach bedeckter unverzweigter Ring, dessen einzelnes Blatt, in gleicher Weise wie jedes andere, die in Figur 4 auf Tafel VI dargestellte Einteilung trägt: eine regulär durchschlungene Uebergangsform unserer Fläche. Die Verschiebungen von der Periode 2 sind jetzt bezeichnet durch Blättervertauschungen, und man erkennt, dass sie eine in der Gesammtheit ausgezeichnete Untergruppe bilden.

Aus dieser regulär durchschlungenen Fläche leitet sich eine Uebergangsform ab, in welcher die Fläche nur nach der einen Richtung doppelt überdeckt erscheint, während nach der anderen Richtung die Blätter nebeneinander liegen. In dieser Zwischenform bilden Vertical- wie Horizontalsubstitutionen je für sich eine Gruppe. Die durch unsere regulär durchschlungene Fläche vorgestellte Gruppe ist eine zerfallende, und wir können sie, in Analogie mit unseren früheren Ueber-

1) Vergl. die Anmerkung 3 auf pag. 48 des § 11.

lagerungen, erzeugen durch Uebereinanderlagerung zweier Ringflächen, deren eine in Richtung der Meridian-, deren andere in Richtung der Breiten-Curven doppelt überdeckt ist.

3.

Wir betrachten schliesslich noch in Kürze die zwei Flächen

$$[2,3,8]\ N=48\ p=2 \text{ und}$$
$$[3,3,6]\ N=24\ p=3,$$

deren Beziehung zu den eben behandelten Fällen sogleich deutlich werden soll.

Für die erstere Fläche stellt sich die Reihenfolge der successive ausgezeichneten Untergruppen dar durch die Flächen $[3,3,4]\ N=24$ , $[4,4,4]\ N=8$, deren letztere, eine zerfallende Gruppe definirend, durch Uebereinanderlagerung der Flächen

$$\begin{array}{l} [4,4,2]\ N=4\ p=1 \\ -[4,4]\ N=4\ p=0 \\ \hline [4,4,4]\ N=8 \end{array}$$

entsteht, wobei Reduction [im Sinne der §§ 9 und 11] eintritt. Die letzteren Gruppen sind cyklische von der Periode 4, welche die cyklische Gruppe von der Periode 2 ausgezeichnet enthalten. Damit ist die völlige Zerlegung der Fläche gekennzeichnet; aber wir können diese noch kürzer erschliessen, wenn wir nicht successive einfache Gruppen als Horizontalsubstitutionen abscheiden, sondern eine [uns bekannte] zusammengesetzte. Und dies ist hier möglich, wenn wir berücksichtigen, dass unsere Fläche eine Uebergangsform besitzt, gebildet aus 2 Blättern $p_1=0$, deren jedes nach dem Octaedertypus regulär eingeteilt ist, und welche an den 6 Octaedereckpunkten dieser Flächeneinteilung untereinander verzweigt sind. So entsteht die verlangte Verzweigung $[2,3,8]\ N=48$ und wir ersehen in der Fläche $[2,2,2,2,2,2]\ N=2$, welche durch die Verzweigung der

Uebergangsform gebildet ist, eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit, während die zugehörige zusammengesetzte Gruppe, welche durch die Einteilung des einzelnen Blattes vorgestellt ist, unmittelbar die Octaedergruppe ist; die Zerlegung dieser letzteren in ihre componirenden Bestandteile ist bekannt und somit die Zerlegung der ganzen Gruppe gegeben, welche, wie man sich leicht überzeugt, in der gleichen Weise durch die Reihenfolge der oben angeführten Flächen definirt ist.

Die zweite Fläche [3, 3, 6] N=12 lässt sich innerhalb ihres Geschlechts nicht weiter zerlegen, d. h. sie besitzt keine Uebergangsform mehr, in welcher das einzelne Blatt das Geschlecht $p_1 = 0$ hat. Vielmehr stellt sich ihre weitere Zerlegung in einer Uebergangsform dar, gebildet von zwei übereinanderliegenden Ringen ($p_1 = 1$), die je die reguläre Einteilung [3, 3, 3] N=12 tragen [siehe Nr. 2 dieses §] und an vier entsprechenden Punkten 3 untereinander verzweigt sind[1]). Die Zerlegung der durch die Ringeinteilung vorgestellten zusammengesetzten Gruppe in ihre einfachen componirenden Gruppen ist bekannt und damit die Zerlegung der Gesammtgruppe gegeben.

## II.

Wir studiren noch die beiden schon oben als Beispiele mehrdeutiger Lösung der diophantischen Gleichung discutirten Fälle

[2, 4, 8] N=32 p=3.

und

[7, 7, 7] N=7 p=3.

---

1) Denken wir den Ring [3, 3, 3] N=12 in der oben angegebenen Weise als regulär durchschlungene Uebergangsform, verdoppeln und verzweigen ihn, wie eben geschildert, so haben wir die einfachste Form einer regulär durchschlungenen und verzweigten Uebergangsform.

für deren jeden wir zwei wesentlich verschiedene Flächen unterschieden haben.[1])

## 1.

## Die Flächen [2, 4, 8], N = 32.

Aus den Figuren der Tafel VII, welche uns die Netze beider Flächen [im Sinne des § 3] darstellen, lesen wir unmittelbar die folgenden Tabellen der Transformationen unserer Flächen in sich ab:

### 1) Fläche I.

| Transformationen | | Zahl der festbleibenden Pkte 2 | 4 | 8 | Zahl der Transf. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) Drehungen um die Pkte 8 | v. d. Periode 8 | — | — | 2 | $2.4 = 8$ |
| | „ „ „ 4 | — | — | 4 | $1.2 = 2$ |
| | „ „ „ 2 | — | — | 4 | $1.1 = 1$ |
| 2) Drehungen um die Pkte 4 | v. d. Periode 4 | — | 4 | — | $2.2 = 4$ |
| | „ „ „ 2 | — | 4 | — | $2.1 = 2$ |
| 3) Drehungen um die Pkte 2 | v. d. Periode 2 | 4 | — | — | $4.1 = 4$ |
| 4) Verschiebungen[2]) | v. d. Periode 4 | ——— | | | $2.2 = 4$[3]) |
| | „ „ „ 4 | ——— | | | $1.2 = 2$ |
| | „ „ „ 4 | ——— | | | $1.2 = 2$ |
| | „ „ „ 4 | ——— | | | $1.2 = 2$ |
| 5) Identische Transformation | v. d. Periode 1 | alle Pkte fest | | | $1.1 = 1$ |

Gesammtzahl = 32.

---

1) Vergl. § 5, Beispiel 4 und 5. pag. 26 ff.

2) Um die Verschiebungen in unseren Figuren zu kennzeichnen, haben wir diejenigen Blätter durch Ziffern bezeichnet, in welche das mit I bezeichnete Blatt übergeführt werden muss, um eine Verschiebung der Fläche in sich hervorzurufen. Die Ziffern bedeuten dabei die Periode der Verschiebung.

3) Wir trennen hier „gleichberechtigte" Verschiebungen im Sinne von § 6 [pag. 32].

## 2) Fläche II.

| | | Zahl der festbleibenden Pkte 2 | 4 | 8 | Zahl der Transf. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) Drehungen um die Pkte 8 | v. d. Periode 8 | -- | — | 2 | $2.4=8$ |
| | „ „ „ 4 | — | — | 4 | $1.2=2$ |
| | „ „ „ 2 | — | — | 4 | $1.1=1$ |
| 2) Drehungen um die Pkte 4 | v. d. Periode 4 | — | 2 | — | $4.2=8$ |
| | „ „ „ 2 | — | 8 | — | $1.1=1$ |
| 3) Drehungen um die Pkte 2 | v. d. Periode 2 | 4 | — | — | $4.1=4$ |
| 4) Verschiebungen | v. d. Periode 4 | ——— | | | $1.2=2$ |
| | „ „ „ 2 | ——— | | | $4.1=4$ [1]) |
| | „ „ „ 2 | —— | —— | | $1.1=1$ |
| 5) Die ident. Transformation | v. d. Periode 1 | alle Pkte fest | | | $1.1=1$ |

Gesammtzahl = 32.

Der Vergleich der für die beiden Flächen erhaltenen Transformationstabellen zeigt nun unmittelbar, dass diese von einander völlig verschiedene Gruppen definiren.

Die nähere Untersuchung ergibt dass die Gruppe der Fläche I eine nicht zerfallende, die der Fläche II eine zerfallende ist. Wir können nämlich die Verzweigung [2, 4, 8] auf eine Weise durch Uebereinanderlagerung zweier Riemann'scher Flächen erzeugen[2]), nämlich durch eine Uebereinanderlagerung mit Reduction:

$$\begin{array}{l} [2,2,8]\ N=16\ p=0 \\ -[4,4]\ N=4\ \ p=0 \\ \hline [2,4,8]\ N=32 \end{array}$$

1) Wir trennen hier „gleichberechtigte" Verschiebungen im Sinne von § 6 [pag. 32.].

2) Um für einen gegebenen Fall die Möglichkeit der Erzeugung einer Fläche durch Uebereinanderlagerung regulärer Riemann'scher Flächen zu erschliessen, ist stets nur eine endliche Zahl

[Die Fläche [4,4] N=4 könnte dabei auch durch die Fläche [2,4,4] N=4, p=1 ersetzt werden, was jedoch in der Gruppe keine Aenderung hervorruft.] Geometrisch stellt sich diese Uebereinanderlagerung dar durch eine Uebergangsform, gebildet aus zwei Blättern $p_1=0$, deren jedes die Einteilung [2,2,8] N=16 trägt und welche in 8 homologen Punkten 2 der Flächeneinteilung untereinander verzweigt sind. So entsteht die Fläche [2,4,8] N=32. In dieser Form stellen sich die Drehungen von der Periode 2 um die Punkte 4 als „Blättervertauschung" dar, wobei die sämmtlichen 8 Punkte 4 [welche beiden Blättern angehören] fest bleiben: Die Uebergangsform entspricht also der Fläche II unserer Tabelle [bei Fläche I bleiben nämlich bei diesen Drehungen nur 4 Punkte 4 liegen.]

Suchen wir nun, jede unserer Gruppen[1]) weiter zu zergliedern, nach ausgezeichneten Untergruppen, so ergeben sich sofort für jede unserer beiden Flächen drei gleichmässig berechtigte Uebergangsformen[2]), indem wir [vergl. Fig. 1, $\alpha, \beta, \gamma$ auf Tafel VIII.] 8 nach dem Kreisteilungs-

---

von Versuchen zu machen, denn die betreffenden componirenden Flächen sind allgemein stets von niedrigerem Geschlecht als die Gesammtfläche und höchstens, wenn das Geschlecht dieser p=0 oder p=1 ist, kann das Geschlecht der Componenten gleich dem der erzeugten Fläche sein, so dass wir die ersteren stets nur innerhalb eines endlichen Gebietes zu suchen haben.

1) Die Zerlegung der zerfallenden Gruppe [2,4,8] ist im obigen allerdings schon völlig genügend behandelt, indem die beiden componirenden Gruppen (eine cyklische Gruppe und ein Doppelpyramidentypus) uns völlig bekannt sind; doch fassen wir gleichwol hier ausgezeichnete Untergruppen heraus, solche nämlich, welche sich darstellen als Flächen vom gleichen Geschlechte mit der ursprünglichen. Die Zerlegung lässt dabei im Vergleich mit der Zerlegung der Fläche I den Unterschied der durch beide Flächen definirten Gruppen vollständig erkennen.

2) Vergl. § 11 pag. 49.

typus [2,2] N=2 regulär eingeteilte Blätter [$p_1$=o] untereinander in der an den Figuren bezeichneten Multiplicität regulär verzweigen.

So entstehen je drei regulär verzweigte Flächen, definirt durch die Verzweigungen:

$\alpha$) [2,8,8] N=16
$\beta$) [4,4,4] N=16
$\gamma$) [2,2,2,4] N=16

Aber auch diese Flächen sind durch ihre Verzweigung nicht eindeutig bestimmt, sondern man unterscheidet für jede derselben zwei verschiedene Flächen, die als Uebergangsformen bezüglich gerade den Flächen I. und II. zugehören. Bezeichnen wir je diese Folge durch

$\alpha_I$ , $\alpha_{II}$
$\beta_I$ , $\beta_{II}$
$\gamma_I$ , $\gamma_{II}$

so ergibt der Vergleich von $\alpha_I$ mit $\alpha_{II}$ u. s. w. die folgenden Sätze:

1) Die Fläche $\alpha_I$ definirt eine nichtzerfallende, zusammengesetzte Gruppe; die Fläche $\alpha_{II}$ dagegen eine zerfallende, entstehend durch Uebereinanderlagerung der beiden Flächen

— [8,8], N=8; p=o
[2,2] —, N=2; p=o
[2,8,8], N=16

2) Die Flächen $\beta_I$ und $\beta_{II}$ definiren beide zerfallende Gruppen; und zwar entsteht die Fläche $\beta_I$ durch die Uebereinanderlagerung von:

— [4,4], N=4; p=o
[4,4] —, N=4; p=o
[4,4,4], N=16

Die Fläche $\beta_{II}$ aber entsteht durch die Uebereinanderlagerung „mit Reduction“ von:

$$\begin{array}{l} [4,2,2]\ ,\ N=8\ ;\ p=o \\ \underline{-[4,4]\ ,\ N=4\ ;\ p=o} \\ [4,4,4]\ ,\ N=16 \end{array}$$

3) Die Gruppe von $\gamma_I$ ist eine nichtzerfallende; die der Fläche $\gamma_{II}$ dagegen eine zerfallende. $\gamma_{II}$ wird nämlich erzeugt durch Uebereinanderlagerung von

$$\begin{array}{l} -\ [2\ ,\ 2\ ,\ 4],\ N=8;\ p=o \\ \underline{[2\ ,\ 2]-\ -,\ N=2;\ p=o} \\ [2\ ,\ 2\ ,\ 2\ ,\ 4],\ N=16 \end{array}$$

Diese Angaben erschliesst man in gleicher Weise wie die oben für die Flächen $[2,4,8]$ $N=32$ aufgestellten durch Betrachtung der zugehörigen Uebergangsformen und ihren Vergleich mit den obigen Transformationstabellen.

Ebenso lässt sich die weitere Zerlegung unserer Gruppen durchführen.

2.

Wir behandeln noch die Flächen

$$[7,7,7],\ N=7;\ p=3,$$

[Tafel VIII. Fig. 2] für welche wir gleichfalls zwei wesentlich verschiedene Formen unterschieden [§ 5.].

Die Gruppe der Fläche ist hier beidemale die einfache cyklische Gruppe von der Periode 7.

Der Unterschied der zwei sich ergebenden Flächen zeigt sich lediglich darin, dass, wenn wir um die Mitte a um $^1/_7$ drehen, dann bei b und c für Fläche I Drehungen je um $^5/_7$ des Kreisumfanges erfolgen, während für Fläche II diese Drehungen bei b $^2/_7$ bei c $^4/_7$ des Kreisumfanges betragen.

Die beiden eben behandelten Beispiele ergeben die Bemerkung: Die aus der Angabe der Verzweigung einer regulären Riemann'schen Fläche etwa mögliche Vieldeutigkeit ihrer Zusammenhängung kann sich in der völligen Verschiedenheit der zugehörigen Gruppen aussprechen, oder aber es tritt dieselbe Gruppe in verschiedenen Formen auf. Diese Formen besitzen zwar je dieselben Verzweigungspunkte, sind aber übrigens jenen Formen gleichzustellen, deren Existenz uns die Eigenschaft der Polytropie einer Gruppe erkennen liess.

---

Die weitere Durchführung und den Abschluss der Arbeit hoffe ich in Kurzem anderwärts veröffentlichen zu können [September 1879.].

---

Fig. 2.

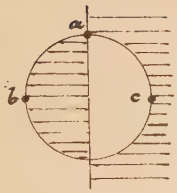



Fig. 5.

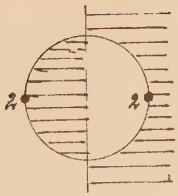



Fig. 1.

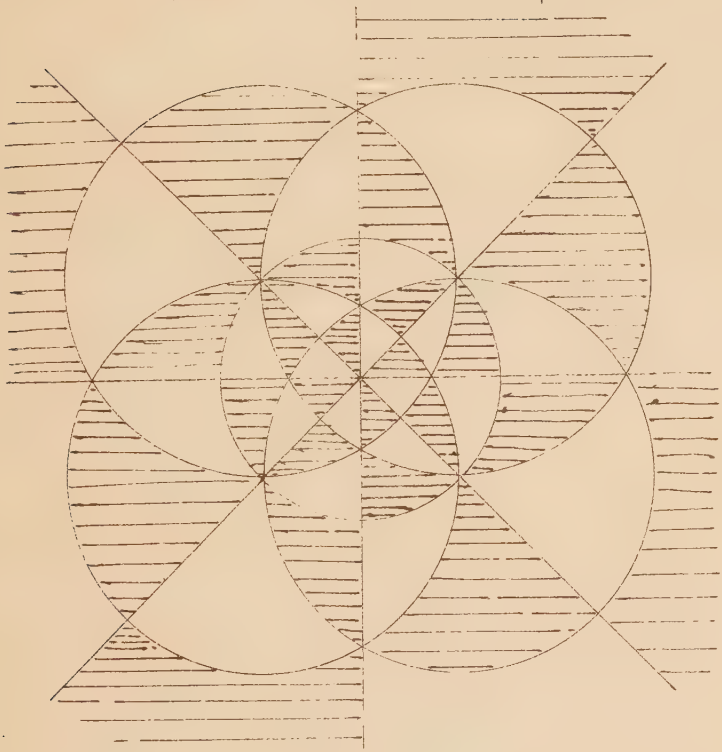


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 3.

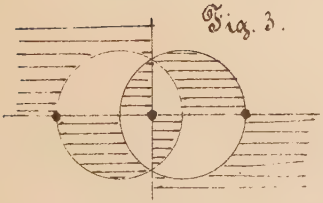
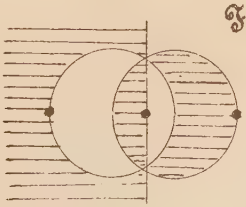


Fig. 4.



Zu § 12. I.

Fig. 1.

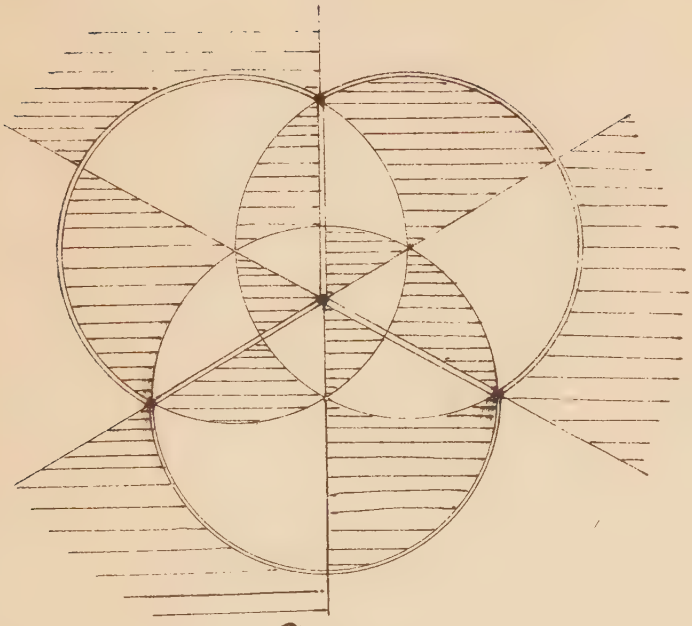


Fig. 3.

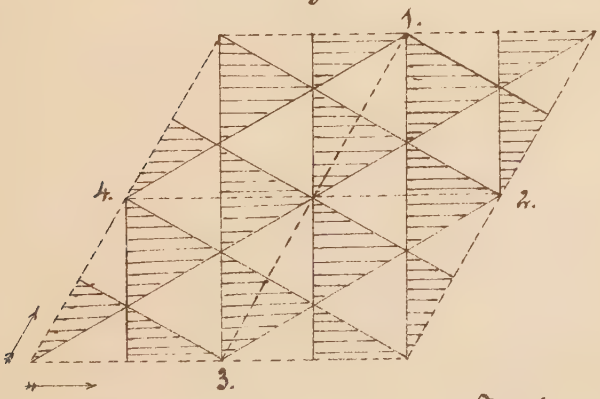



Fig. 2.

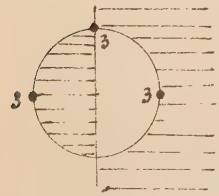
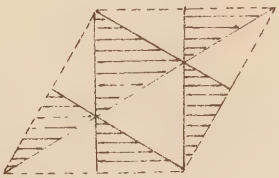
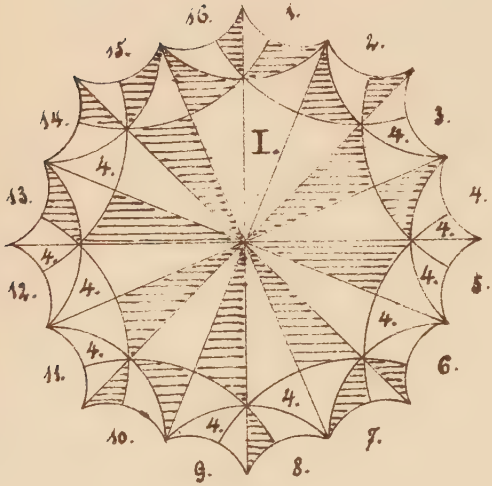



Fig. 4.



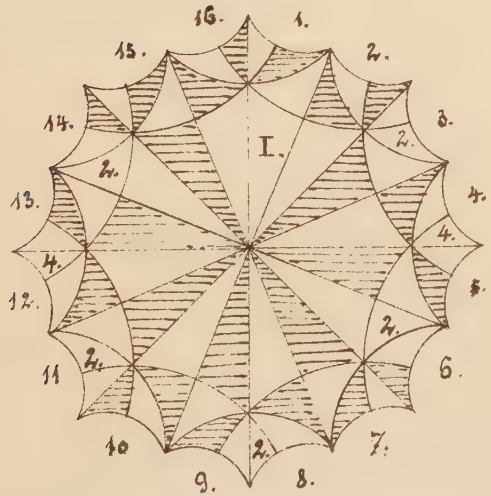
## Fläche I.




Zusammengehörigkeit der Kanten.

1 – 6. , 3 – 8. , 5 – 10. , 7 – 12. .
9 – 14. , 11 – 16. , 13 – 2. , 15 – 4. .

## Fläche II.




Zusammengehörigkeit der Kanten:

1 – 14 , 3 – 16 , 5 – 2 , 7 – 4 .
9 – 6 , 11 – 8 , 13 – 10 , 15 – 12 .

Fig. 1.

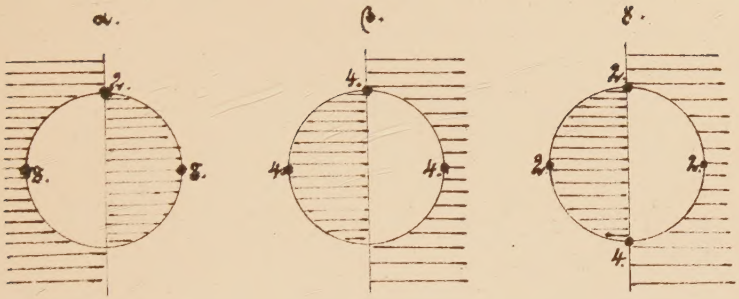
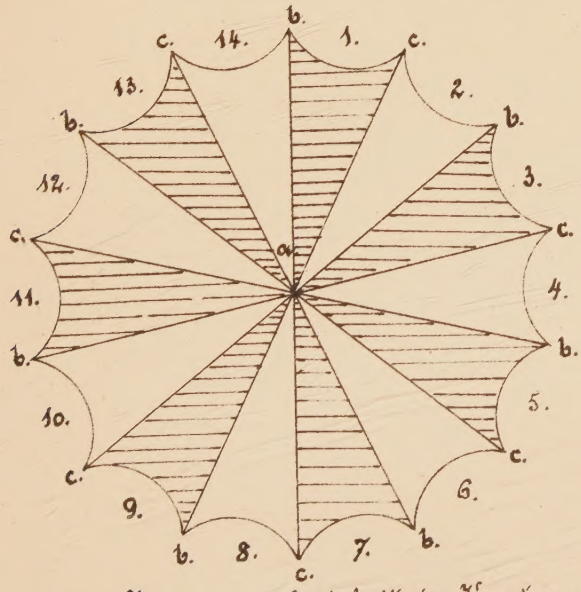



Fig. 2.




Zusammengehörigkeit der Kanten:

| Fläche I. | | Fläche II. | |
|---|---|---|---|
| 1 – 8. | 9 – 2. | 1 – 6. | 9 – 14. |
| 3 – 10. | 11 – 4. | 3 – 8. | 11 – 2. |
| 5 – 12. | 13 – 6 | 5 – 10. | 13 – 4. |
| 7 – 14. | | 7 – 12. | |

Zu § 12. II.